N. PISKUNOV

# cálculo diferencial e integral

## tomo II



Editorial Mir Moscú


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

Н. С. ПИСКУНОВ

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

ТОМ

# II

Седьмое издание

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» МОСКВА

N. PISKUNOV

# CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

3ª edición

TOMO

II

EDITORIAL MIR · MOSCU

Traducido del ruso por el ingeniero
K. MEDKOV

(на испанском языке)

Impreso en la URSS

# INDICE

CAPITULO XIII. ECUACIONES DIFERENCIALES

## CAPITULO XIV. INTEGRALES MULTIPLES



## CAPITULO XV. INTEGRALES CURVILINEAS E INTEGRALES DE SUPERFICIE



## CAPITULO XVI. SERIES

CAPITULO XVII. SERIES DE FOURIER



CAPITULO XVIII. ECUACIONES DE LA FISICA MATEMATICA

CAPITULO XIX. CALCULO OPERACIONAL Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES

CAPITULO XIII

# ECUACIONES DIFERENCIALES

## § 1. PLANTEO DEL PROBLEMA ECUACION DEL MOVIMIENTO DE UN CUERPO, SIENDO LA RESISTENCIA DEL MEDIO PROPORCIONAL A LA VELOCIDAD. ECUACION DE LA CATENARIA

Supongamos que la función $y = f(x)$ expresa cuantitativamente un fenómeno. Al estudiar este fenómeno es imposible establecer directamente el carácter de la dependencia entre $y$ y $x$; sin embargo, se puede establecer una dependencia entre las magnitudes $x$, $y$, y las derivadas de $y$ respecto a $x$: $y'$, $y''$, . . . $y^{(n)}$, es decir, se puede escribir una ecuación diferencial.

De la dependencia obtenida entre $x$, $y$ y las derivadas es preciso deducir la dependencia directa entre $x$ e $y$, es decir, hallar $y = f(x)$, o, como suele decirse, **integrar una ecuación diferencial.**

Estudiemos dos ejemplos.

**Ejemplo 1.** Desde una cierta altura se ha arrojado un cuerpo de masa $m$. Determinar la ley según la cual cambia la velocidad de caída $v$, si sobre el cuerpo, además de la fuerza de gravedad, actúa la fuerza de resistencia del aire, proporcional a la velocidad $v$ (el coeficiente de proporcionalidad es $k$), es decir, es preciso encontrar $v = f(t)$.

**Solución.** En virtud de la segunda ley de Newton $m\frac{dv}{dt} = F$, donde, $\frac{dv}{dt}$ es la aceleración del cuerpo en movimiento (la derivada de la velocidad respecto al tiempo), y $F$ es una fuerza que actúa sobre el cuerpo en la dirección del movimiento. Esta última es resultante de dos fuerzas: la de gravedad, $mg$, y la de la resistencia del aire, $kv$ (se toma con signo menos, puesto que está dirigida en dirección opuesta a la velocidad).

Entonces

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv. \tag{1}$$

Hemos obtenido una relación entre una función desconocida $v$ y su derivada $\frac{dv}{dt}$, es decir, **una ecuación diferencial respecto a la función desconocida** $v$ (la ecuación del movimiento de paracaídas de ciertos tipos). Resolver esta ecuación diferencial significa encontrar una función $v = f(t)$ tal que satisfaga idénticamente a la ecuación diferencial dada. Existe una infinidad de funciones de este tipo. Es fácil comprobar que toda función del tipo

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \tag{2}$$

satisface la ecuación (1) cualquiera que sea el número constante $C$. ¿Pero, cuál de estas funciones dará la dependencia buscada entre $v$ y $t$? Para encontrarla, usemos una condición adicional: al arrojar el cuerpo, le damos una velocidad inicial $v_0$ (que, en particular, puede ser igual a cero); supongamos conocida esta velocidad inicial. Pero, en este caso, la función buscada $v = f(t)$ debe ser tal que para $t = 0$ (al principio del movimiento) se verifique la condición $v = v_0$. Poniendo $t = 0$, $v = v_0$ en la fórmula (2), obtenemos:

$$v_0 = C + \frac{mg}{k}, \quad \text{de donde:} \quad C = v_0 - \frac{mg}{k}.$$

De esta manera se determina la constante $C$. Por consiguiente, la dependencia buscada entre $v$ y $t$ es:

$$v = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}. \tag{2'}$$

De esta fórmula se deduce que si $t$ es suficientemente grande, la velocidad $v$ depende poco de $v_0$.

Notemos que si $k = 0$ (es decir, la resistencia del aire no existe o es tan pequeña que podemos despreciarla), obtenemos el resultado*) bien conocido en física:

$$v = v_0 + gt. \tag{2''}$$

Esta función satisface la ecuación diferencial (1) y la condición inicial: $v = v_0$ para $t = 0$.

**Ejemplo 2.** Un hilo flexible homogéneo está suspendido por sus dos extremos. Hallar la ecuación de la curva cuya forma va a tomar el hilo bajo su propio peso (esta forma es la que toman las cuerdas, cables y cadenas suspendidas).

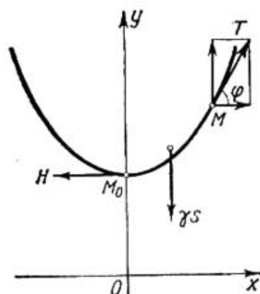


*Fig. 244*

**Solución.** Sea $M_0$ $(0, b)$ el punto más bajo del hilo, y $M$, un punto arbitrario (fig. 244). Examinemos la parte $M_0M$ del hilo. Esta parte está equilibrada bajo la acción de tres fuerzas:

1) la tensión $T$, que actúa a lo largo de la tangente al punto $M$, y forma con el eje $Ox$ el ángulo $\varphi$;

2) la tensión $H$, en el punto $M_0$, que actúa horizontalmente;

3) el peso $\gamma s$ del hilo, dirigido verticalmente hacia abajo; donde $s$ es la longitud del arco $M_0M$, $\gamma$ es el peso específico lineal del hilo.

Descomponiendo $T$ en sus componentes horizontal y vertical, obtenemos las ecuaciones del equilibrio: $T \cos\varphi = H$, $T \operatorname{sen}\varphi = \gamma S$.

Dividiendo la segunda igualdad por la primera, obtenemos:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\gamma}{H} S. \tag{3}$$

---

*) La fórmula (2″) puede obtenerse de la (2′), pasando al límite:

$$\lim_{k \to 0} \left[ \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k} \right] = v_0 + gt.$$

Supongamos ahora que la ecuación de la curva buscada se puede escribir en la forma: $y = f(x)$. Aquí, $f(x)$ es la función que debemos encontrar. Notemos que

$$\operatorname{tg} \varphi = f'(x) = \frac{dy}{dx} .$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} S, \tag{4}$$

donde por $a$ está designada la razón $\frac{H}{\gamma}$.

Derivemos respecto a $x$ ambos miembros de la igualdad (4):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{ds}{dx} . \tag{5}$$

Pero ya sabemos (véase § 1, cap. VI) que:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} .$$

Poniendo esta expresión en la ecuación (5) obtenemos la ecuación diferencial de la curva buscada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} . \tag{6}$$

Esta función expresa la relación entre derivadas primera y segunda de la función desconocida $y$.

Sin prestar atención a los métodos de resolución de ecuaciones, indiquemos que toda función de la forma

$$y = \frac{a}{2} \left[ e^{+\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} + e^{-\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} \right] + C_2 \tag{7}$$

satisface la ecuación (6), cualesquiera que sean los valores de las constantes $C_1$ y $C_2$. Esto es fácil comprobar, introduciendo las derivadas primera y segunda de la función mencionada en la ecuación (6). Indiquemos sin demostración que estas funciones (para diferentes $C_1$ y $C_2$) abarcan todas las soluciones posibles de la ecuación (6), lo que será demostrado más adelante (en el § 18).

Las gráficas de todas las funciones obtenidas de esta manera se llaman *catenarias*. Aclaremos, ahora, como se debe elegir las constantes $C_1$ y $C_2$ para obtener precisamente la catenaria en la que el punto inferior $M$ tenga las coordenadas $(0, b)$. Puesto que, para $x = 0$, el punto de la catenaria ocupa la posición más baja, la tangente a este punto es horizontal, es decir, $\frac{dy}{dx} = 0$. Además, según la hipótesis, en el punto indicado la ordenada es igual a $b$, es decir $y = b$.

De la ecuación (7) se deduce:

$$y' = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{x}{a} + C_1} - e^{-\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} \right).$$

Poniendo aquí $x = 0$, obtenemos: $0 = \frac{1}{2} (e^{C_1} - e^{-C_1})$. Por tanto, $C_1 = 0$.

Si $b$ es la ordenada del punto $M_0$, entonces $y = b$ para $x = 0$.
Suponiendo que $x = 0$, $C_1 = 0$ de la ecuación (7) obtenemos $b = \frac{a}{2}(1+1) + C_2$, de donde: $C_2 = b - a$.

En definitiva encontramos:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) + b - a.$$

La ecuación (7) se simplifica considerablemente, si tomamos la ordenada del punto $M_0$ igual al número $a$. Entonces, la ecuación de la catenaria será:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

## § 2. DEFINICIONES

**Definición 1.** Una ecuación que establece una relación entre la variable independiente $x$, la función buscada $y = f(x)$ y sus derivadas $y'$, $y''$, . . . $y^{(n)}$ se llama *ecuación diferencial.*

Una ecuación diferencial se puede escribir simbólicamente en la forma siguiente:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

ó

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

Si la función buscada $y = f(x)$ es la de **una sola** variable independiente, la ecuación diferencial se llama *ordinaria.* Ocupémonos, por ahora, sólo de las ecuaciones diferenciales ordinarias*).

**Definición 2.** El orden de la derivada superior que entra en la ecuación se llama *orden* de la ecuación diferencial.

Por ejemplo, la ecuación

$$y' - 2xy^2 + 5 = 0$$

es de primer orden.

*) A la par con las ecuaciones diferenciales ordinarias, en el análisis matemático se estudian también las ecuaciones en derivadas parciales. Las ecuaciones que establecen una relación entre la función desconocida $z$, dependiente de dos o varias variables $x$, $y$, . . ., las propias variables $x$, $y$, . . ., y las derivadas parciales de $z$: $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, etc., se llaman *ecuaciones en derivadas parciales.*

Por ejemplo, la ecuación $x\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial y}$ será en derivadas parciales con la función desconocida $z(x, y)$.

Es fácil comprobar que la función $z = x^2y^2$ satisface la ecuación dada (así como infinidad de otras funciones). En el curso presente las ecuaciones en derivadas parciales se estudian en el capítulo XVIII, tomo II.

La ecuación

$$y'' + ky' - by - \text{sen } x = 0$$

es de segundo orden, etc.

La ecuación examinada en el ejemplo 1 del párrafo anterior es de primer orden, y la del ejemplo 2, de segundo orden.

**Definición 3.** Toda función $y = f(x)$ que, introducida en la ecuación, la transforma en una identidad, se llama *solución* o *integral* de una ecuación diferencial.

**Ejemplo 1.** Sea la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Las funciones $y = \text{sen } x$, $y = 2 \cos x$, $y = 3 \text{ sen } x - \cos x$, y, en general, toda función de la forma $y = C_1 \text{ sen } x$, $y = C_2 \cos x$,

ó

$$y = C_1 \text{ sen } x + C_2 \cos x$$

son soluciones de la ecuación dada cualesquiera que sean las constantes $C_1$ y $C_2$. Esto es fácil comprobar, al introducir las funciones mencionadas en la ecuación.

**Ejemplo 2.** Examinemos la ecuación:

$$y'x - x^2 - y = 0.$$

Sus soluciones son funciones de la forma:

$$y = x^2 + Cx,$$

donde $C$ es una constante arbitraria. En efecto, derivando la función $y = x^2 + Cx$, hallamos:

$$y' = 2x + C.$$

Sustituyendo las expresiones $y$ e $y'$ en la ecuación original, obtenemos la identidad:

$$(2x + C)\, x - x^2 - x^2 - Cx = 0.$$

Cada una de las ecuaciones examinadas en los ejemplos 1 y 2 tiene una infinidad de soluciones.

## § 3. ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN (GENERALIDADES)

1. La ecuación diferencial de **primer** orden tiene la forma:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Si esta ecuación se resuelve respecto a $y'$, se puede escribirla en la forma:

$$y' = f(x, y). \tag{1'}$$

En este caso se dice que la ecuación diferencial está solucionada respecto a la derivada. Para tal ecuación es válido el siguiente teorema acerca de la existencia y la unicidad de la solución de una ecuación diferencial.

**Teorema.** *Si en la ecuación*

$$y' = f(x, y)$$

*la función $f(x, y)$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ respecto a $y$ son continuas en cierto dominio $D$ del plano $Oxy$, y si $(x_0, y_0)$ es un punto de este dominio, entonces existe la única solución de esta ecuación, $y = \varphi(x)$, que satisface la condición $y = y_0$, para $x = x_0$.*

El significado geométrico del teorema es que existe sólo la única función $y = \varphi(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $(x_0, y_0)$.

Del teorema anterior se deduce que la ecuación (1′) tiene una infinidad de soluciones diferentes [por ejemplo, la solución cuya gráfica pasa por el punto $(x_0, y_0)$, otra solución cuya gráfica pasa por el punto $(x_0, y_1)$, por el punto $(x_0, y_2)$ etc., siempre cuando estos puntos se encuentren en el dominio $D$].

La condición de que la función $y$ debe tomar valor del número dado $y_0$, para $x = x_0$, se llama *condición inicial.* Muy a menudo esta condición se escribe en la forma:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0.$$

**Definición 1.** Se llama *solución general* de una ecuación diferencial de primer orden a la función

$$y = \varphi(x, C), \tag{2}$$

que depende de una constante arbitraria $C$ y satisface las condiciones siguientes:

a) satisface la ecuación diferencial para cualquier valor concreto de la constante $C$;

b) cualquiera que sea la condición inicial $y = y_0$, para $x = x_0$, es decir $(y)_{x=x_0} = y_0$, se puede encontrar un valor $C = C_0$ tal, que la función $y = \varphi(x, C_0)$ satisfaga la condición inicial dada.

En este caso se supone que los valores $x_0$ e $y_0$ pertenecen al dominio de variación de las variables $x$ e $y$, en el que se verifican las condiciones del teorema sobre la existencia y la unicidad de la solución.

2. Durante la búsqueda de la solución general de una ecuación diferencial llegamos a menudo a una correlación de la forma:

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{2′}$$

no resuelta respecto a $y$. Al resolverla respecto a $y$, obtenemos la solución general. Sin embargo, no siempre es posible expresar $y$ a partir de la correlación (2′) mediante las funciones elementales. En tales casos la solución general se queda en forma implícita.

Una igualdad de la forma $\Phi(x, y, C) = 0$, que da la solución general en forma implícita, se llama *integral general* de la ecuación diferencial.

**Definición 2.** Toda función $y = \varphi(x, C_0)$ deducida de la solución general $y = \varphi(x, C)$, dando a la constante $C$ un valor determinado $C = C_0$, se llama *solución particular*. En este caso la correlación $\Phi(x, y, C_0) = 0$ se llama *integral particular* de la ecuación.

**Ejemplo 1.** La ecuación de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

tiene por solución general una familia de funciones $y = \frac{C}{x}$; esto se puede comprobar mediante una simple sustitución en la ecuación.

Hallemos una solución particular que satisfaga la siguiente condición inicial: $y_0 = 1$, para $x_0 = 2$. Poniendo estos valores en la fórmula $y = \frac{C}{x}$, obtenemos: $1 = \frac{C}{2}$ ó $C = 2$. Por consiguiente, la función $y = \frac{2}{x}$ es la solución particular buscada.

Desde un punto de vista geométrico, la integral general representa una familia de curvas en el plano de coordenadas, dependiente de una constante arbitraria $C$ (o, como se suele decir, de un parámetro $C$). Estas curvas se llaman *curvas integrales* de la ecuación diferencial dada.

Cada integral particular está representada por una curva de esta familia, que pasa por un punto dado del plano.

Así, en último ejemplo la integral general está representada geométricamente mediante la familia de hipérbolas $y = \frac{C}{x}$, y la integral particular, determinada por la condición inicial indicada, mediante una de estas hipérbolas que pasa por el punto $M_0$ (2,1). En la figura 245 están representadas las curvas de la familia que corresponden á ciertos valores del parámetro: $C = \frac{1}{2}$, $C = 1$, $C = 2$, $C = -1$, etc.

Con el objeto de ilustrar mejor nuestros razonamientos, llamaremos **solución de la ecuación** no sólo a la función $y = \varphi(x, C_0)$, que satisface la ecuación, sino también a la **curva integral** correspondiente. En relación con esto trataremos, por ejemplo, de la **solución que pasa por el punto** $(x_0, y_0)$.

**Observación:** La ecuación $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ no tiene solución que pase por un punto del eje $Oy$ (véase fig. 245). Esto se debe a que el segundo miembro de la ecuación no está definido para $x = 0$, y, por tanto, no es continuo.

**Solucionar** o, como se dice a menudo, **integrar** una ecuación diferencial significa:

a) encontrar su solución general o la integral general (si no están dadas las condiciones iniciales), o

b) hallar la solución particular de la ecuación que satisfaga las condiciones iniciales dadas (si éstas existen).

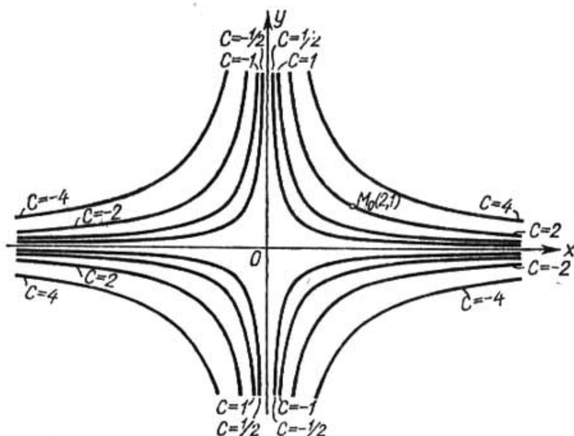



*Fig. 245*

3. Demos la interpretación geométrica de la ecuación diferencial de primer orden.

Sea una ecuación diferencial, resuelta respecto a la derivada:

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \tag{1'}$$

y sea $y=\varphi(x, C)$ su solución general. Esta solución general determina toda la familia de curvas integrales en el plano $Oxy$.

Para todo punto $M$, de coordenadas $x$ e $y$, la ecuación (1′) determina un valor de la derivada $\frac{dy}{dx}$, es decir, el coeficiente angular de la tangente a la curva integral que pasa por este punto. Por consiguiente, la ecuación diferencial (1′) define un conjunto de direcciones o, como se dice, determina el *campo de direcciones* en el plano $Oxy$.

Desde el punto de vista geométrico el problema de la integración de una ecuación diferencial consiste en hallar las curvas, cuyas tangentes están orientadas de modo que su dirección coincida con la dirección del campo en estos puntos.

En la figura 246 se representa el campo de direcciones definido por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}.$$

4. **Examinemos, ahora, el problema siguiente:**

**Sea una familia de funciones que depende sólo de un parámetro** $C$:

$$y=\varphi(x,\ C) \tag{2}$$

**de modo que por todo punto del plano (o de un dominio en el plano) pase sólo una curva de esta familia.**

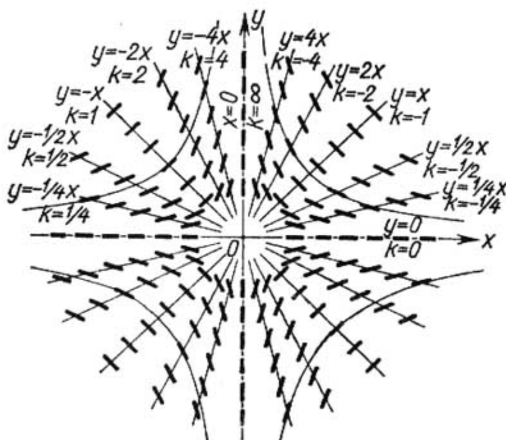



*Fig. 246*

¿Cuál es la ecuación diferencial que acepta esta familia de funciones como integral general?

Derivando respecto a $x$, encontramos de la relación (2):

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'_x(x,\ C). \tag{3}$$

Puesto que por todo punto del plano pasa una sola curva de la familia, para cada par de números $x$ e $y$ se determina un valor único $C$ de la ecuación (2). Introduciendo este valor $C$ en la correlación (3) hallamos $\frac{dy}{dx}$ como función de $x$ e $y$. Así obtenemos la ecuación diferencial satisfecha por toda función de la familia (2).

Por consiguiente, para establecer la relación entre $x$, $y$ y $\frac{dy}{dx}$, *es decir, para escribir la ecuación diferencial cuya integral general* se determina por la fórmula (2), es preciso eliminar $C$ de (2) y (3).

**Ejemplo 2.** Hallar la ecuación diferencial de la familia de parábolas $y = Cx^2$ (fig. 247).

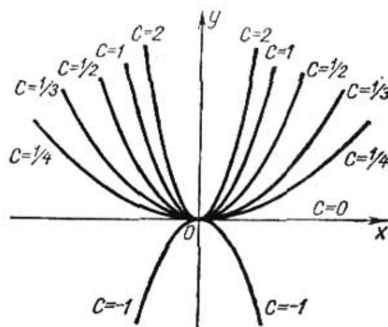



*Fig. 247*

Derivando la ecuación respecto a $x$, hallamos:

$$\frac{dy}{dx} = 2Cx.$$

Introduciendo en esta última el valor

$$C = \frac{y}{x^2},$$

definido por la ecuación de la familia, obtenemos una ecuación derivable de la familia dada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Esta ecuación diferencial se verifica para $x \neq 0$, es decir, en todo dominio que no tenga puntos en el eje $Oy$.

## § 4. ECUACIONES CON VARIABLES SEPARADAS Y SEPARABLES. PROBLEMA DE LA DESINTEGRACION DEL RADIO

Estudiemos una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y), \tag{1}$$

donde el segundo miembro es el producto obtenido mediante la multiplicación de una función que depende sólo de $x$ por una función dependiente sólo de $y$. Suponiendo que $f_2(y) \neq 0$, transformemos (1) del modo siguiente:

$$\frac{1}{f_2(y)}\,dy = f_1(x)\,dx. \tag{1'}$$

Suponiendo que la función $y$ de $x$ es conocida, la ecuación (1') se puede considerar como igualdad de dos diferenciales, cuyas integrales indefinidas se diferenciarán en un sumando constante. Integrando el primer miembro respecto a $y$ y el segundo, respecto a $x$, obtenemos

$$\int \frac{1}{f_2(y)}\,dy = \int f_1(x)\,dx + C.$$

Hemos obtenido una correlación entre la solución $y$, la variable independiente $x$ y la constante arbitraria $C$, es decir, hemos obtenido la integral general de la ecuación (1).

1. La ecuación diferencial de la forma (1')

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0 \tag{2}$$

se llama ecuación con *variables separadas*. Según lo demostrado, su integral general es

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C.$$

**Ejemplo 1.** Sea la ecuación con variables separadas:

$$x\,dx + y\,dy = 0.$$

Integrando, obtenemos la integral general:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1.$$

Puesto que el primer miembro de la última ecuación no es negativo, lo mismo será el segundo miembro. Designemos $2C_1$ por $C^2$:

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

Esta es la ecuación de una familia de circunferencias concéntricas (fig. 248) de radio $C$ y centro en el origen de coordenadas.

2. La ecuación de la forma

$$M_1(x)\,N_1(y)\,dx + M_2(x)\,N_2(y)\,dy = 0 \tag{3}$$

se llama ecuación con *variables separables*. Esta puede ser reducida*)

*) Estas transformaciones son válidas sólo en un dominio donde tanto $N_1(y)$, como $M_2(x)$ no se anulan.

a una ecuación con variables separadas, dividiendo ambos miembros por la expresión $N_1(y)\,M_2(x)$:

$$\frac{M_1(x)\,N_1(y)}{N_1(y)\,M_2(x)}\,dx+\frac{M_2(x)\,N_2(y)}{N_1(y)\,M_2(x)}\,dy=0$$

o

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy=0,$$

es decir, a una ecuación de la forma (2).

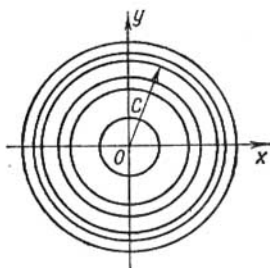



*Fig. 248*

**Ejemplo 2.** Sea la ecuación

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}.$$

Separemos las variables:

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}.$$

**Integrando, encontramos:**

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}+C,$$

**es decir,**

$$\ln|y|=-\ln|x|+\ln|C|\text{*)}\quad \text{ó}\quad \ln|y|=\ln\left|\frac{C}{x}\right|;$$

**de donde obtenemos la solución general:** $y=\frac{C}{x}$.

*) Teniendo en cuenta las transformaciones ulteriores, hemos designado la constante arbitraria mediante $\ln|C|$ lo que es admisible puesto que $\ln|C|$ (cuando $C\neq 0$) puede tomar cualquier valor en los límites de $-\infty$ hasta $+\infty$.

**Ejemplo 3.** Sea la ecuación

$$(1+x)\,y\,dx+(1-y)\,x\,dy=0.$$

Separando las variables, encontramos:

$$\frac{1+x}{x}\,dx+\frac{1-y}{y}\,dy=0; \qquad \left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=0.$$

Integrando, obtenemos:

$$\ln|x|+x+\ln|y|-y=C \quad \text{ó} \quad \ln|xy|+x-y=C;$$

la última relación es la integral general de la ecuación dada.

**Ejemplo 4.** Se ha establecido que la velocidad de la desintegración del radio es directamente proporcional a su masa en cada instante dado. Determinar la ley de variación de la masa del radio en función de tiempo, si para $t=0$ la masa del radio fue $m_0$.

La velocidad de la desintegración se determina del modo siguiente. Sea $m$ la masa al instante $t$ y $m+\Delta m$, al instante $t+\Delta t$. La masa desintegrada durante el tiempo $\Delta t$ es $\Delta m$. La razón $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ es la velocidad media de desintegración. El límite de esta razón para $\Delta t\to 0$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{dm}{dt}$$

es la *velocidad de desintegración* del radio al instante $t$.

Según la hipótesis:

$$\frac{dm}{dt}=-km, \tag{4}$$

donde $k$ es un coeficiente de proporcionalidad ($k>0$). Ponemos el signo menos, porque a medida que transcurre el tiempo la masa del radio disminuye y, por eso: $\frac{dm}{dt}<0$. La ecuación (4) es una ecuación con variables separables. Separemos las variables:

$$\frac{dm}{m}=-k\,dt,$$

Resolviendo la ecuación, obtenemos:

$$\ln m=-\mathrm{kt}+\ln C,$$

de donde

$$\ln\frac{m}{C}=-kt,$$

$$m=Ce^{-kt}. \tag{5}$$

Siendo dada la masa del radio igual a $m_0$ en el instante $t=0$, entonces $C$ debe satisfacer la correlación:

$$m_0=Ce^{-k\cdot 0}=C.$$

Introduciendo el valor de $C$ en la ecuación (5), obtenemos la dependencia buscada (véase la fig. 249) de la masa del radio en función del tiempo:

$$m=m_0e^{-kt}. \tag{6}$$

El coeficiente $k$ se determina experimentalmente de la manera siguiente. Sea $\alpha$ el % de la masa inicial del radio desintegrada durante el tiempo $t_0$. Por

tanto se cumple la correlación:

$$\left(1-\frac{\alpha}{100}\right) m_0 = m_0 e^{-kt_0},$$

de donde:

$$-kt_0 = \ln\left(1-\frac{\alpha}{100}\right),$$

o

$$k = -\frac{1}{t_0}\ln\left(1-\frac{\alpha}{100}\right).$$

*De tal modo hemos establecido que para el radio* $k = 0{,}00044$ (la *unidad de* medida del tiempo es el año).

Poniendo este valor de $k$ en la fórmula (6), tenemos:

$$m = m_0 e^{-0{,}00044t}.$$

*Hallemos el período de semidesintegración del radio, o sea el intervalo* de tiempo durante el cual se desintegra la mitad de la masa inicial del radio.

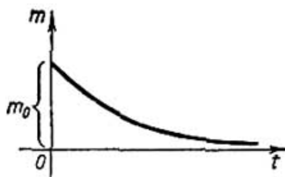



*Fig. 249*

Sustituyendo $m$ en la última fórmula por el valor $\frac{m_0}{2}$, obtenemos la ecuación para determinar el período $T$ de semidesintegración:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-0{,}00044T},$$

de donde:

$$-0{,}00044T = -\ln 2,$$

o sea,

$$T = \frac{\ln 2}{0{,}00044} = 1590 \quad \text{años}.$$

Notemos que muchos otros problemas físicos y químicos desembocan en una ecuación de la forma (4).

**Observación.** La ecuación diferencial con variables separadas de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \text{ó} \quad dy = f(x)\,dx$$

es la más simple.

Su integral general tiene la forma:

$$y = \int f(x)\,dx + C.$$

A la solución de ecuaciones de este tipo está dedicado el capítulo X.

## § 5. ECUACIONES HOMOGENEAS DE PRIMER ORDEN

**Definición 1.** La función $f(x, y)$ se llama *homogénea de grado* $n$ respecto a las variables $x$ e $y$, si para todo $\lambda$ se verifica la identidad:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

**Ejemplo 1.** La función $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ es homogénea de primer grado, puesto que

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3} = \lambda \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \lambda f(x, y).$$

**Ejemplo 2.** $f(xy) = xy - y^2$ es una función homogénea de segundo grado puesto que $(\lambda x)(\lambda y) - (\lambda y)^2 = \lambda^2 [xy - y^2]$.

**Ejemplo 3.** $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ es una función homogénea de grado cero puesto que $\frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} = \frac{x^2 - y^2}{xy}$, es decir,

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y) \quad \text{ó} \quad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y).$$

**Definición 2.** La ecuación de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

se llama *homogénea* respecto a $x$ e $y$, si la función $f(x, y)$ es homogénea de grado cero respecto a $x$ e $y$.

**Solución de una ecuación homogénea.** Según la hipótesis, $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. Haciendo $\lambda = \frac{1}{x}$, tenemos:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

es decir, la función homogénea de grado cero depende sólo de la razón de los argumentos.

En este caso, la ecuación (1) toma la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right). \tag{1'}$$

Efectuemos la sustitución: $u = \frac{y}{x}$, es decir, $y = ux$. Entonces tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx} x.$$

Sustituyendo este valor de la derivada en (1′) obtenemos:

$$u + x\frac{du}{dx} = f(1, u),$$

que es una ecuación con variables separables:

$$x\frac{du}{dx}=f(1,\ u)-u \quad \text{ó} \quad \frac{du}{f(1,\ u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Integrando, hallamos:

$$\int \frac{du}{f(1,\ u)-u}=\int \frac{dx}{x}+C.$$

Sustituyendo $u$ por la razón $\frac{y}{x}$, después de integrar, obtenemos la integral de la ecuación (1′).

**Ejemplo 4.** Sea la ecuación

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2-y^2}.$$

En el segundo miembro tenemos una función homogénea de grado cero. Por consiguiente, se trata de una ecuación homogénea. Realicemos la sustitución: de $\frac{y}{x}=u$; entonces

$$y=ux; \quad \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}; \quad u+x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-u^2}; \quad x\frac{du}{dx}=\frac{u^3}{1-u^2}.$$

Separando las variables, resulta:

$$\frac{(1-u^2)\,du}{u^3}=\frac{dx}{x}; \quad \left(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u}\right)du=\frac{dx}{x};$$

de donde, después de integrar, encontramos:

$$-\frac{1}{2u^2}-\ln|u|=\ln|x|+\ln|C| \quad \text{ó} \quad -\frac{1}{2u^2}=\ln|uxC|.$$

Sustituyendo $u=\frac{y}{x}$ obtenemos la integral general de la ecuación inicial:

$$-\frac{x^2}{2y^2}=\ln|Cy|.$$

*Es imposible en el caso dado expresar y como función explícita de x* mediante las funciones elementales. Sin embargo, es fácil expresar $x$ en función de $y$:

$$x=y\sqrt{-2\ln|Cy|}.$$

**Observación.** La ecuación de la forma

$$M(x,\ y)\,dx+N(x,\ y)\,dy=0$$

será homogénea sólo en aquel único caso, en que $M(x,\ y)$ y $N(x,\ y)$ sean *funciones homogéneas de un mismo grado*. Esto se deduce del hecho de que la razón de dos funciones homogéneas de un mismo grado es una función homogénea de grado cero.

**Ejemplo 5.** Las ecuaciones

$$(2x+3y)\,dx+(x-2y)\,dy=0,$$
$$(x^2+y^2)\,dx-2xy\,dy=0$$

son homogéneas.

## § 6. ECUACIONES QUE SE REDUCEN A ECUACIONES HOMOGENEAS

Se reducen a ecuaciones homogéneas las ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}. \tag{1}$$

Si $c_1=c=0$, la ecuación (1) es, evidentemente, homogénea. Supongamos, ahora, que $c$ y $c_1$ (o uno de ellos) son diferentes de cero. Realicemos el cambio de variables:

$$x=x_1+h, \quad y=y_1+k.$$

Entonces,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx_1}. \tag{2}$$

Introduciendo en la ecuación (2) las expresiones de $x$, $y$ y $\frac{dy}{dx}$, tenemos:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1+ah+bk+c}{a_1x_1+b_1y_1+a_1h_1+b_1k+c_1}. \tag{3}$$

Elijamos $h$ y $k$ de tal modo que se verifiquen las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} ah+bk+c=0,\\ a_1h+b_1k+c_1=0,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

es decir, determinemos $h$ y $k$ como soluciones del sistema de ecuaciones (4). Bajo esta condición la ecuación (3) es homogénea:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1}{a_1x_1+b_1y_1}.$$

Al solucionar esta ecuación, y pasando de nuevo a $x$ e $y$, según las fórmulas (2), obtenemos la solución de la ecuación (1).

El sistema (4) no tiene solución, si $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0$, es decir, si $ab_1=a_1b$. Pero en este caso $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$, es decir, $a_1=\lambda a$, $b_1=\lambda b$,

y, por consiguiente, se puede transformar la ecuación (1) en la forma:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(ax+by)+c}{\lambda(ax+by)+c_1}. \tag{5}$$

Haciendo la sustitución

$$z=ax+by, \tag{6}$$

la ecuación se reduce a una ecuación con variables separables.

En efecto,

$$\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx},$$

de donde:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}. \tag{7}$$

Poniendo las expresiones (6) y (7) en la ecuación (5) obtenemos:

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}=\frac{z+c}{\lambda z+c_1},$$

que es una ecuación con variables separables.

El procedimiento utilizado para la integración de la ecuación (1) se aplica, también, a la integración la ecuación

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right),$$

donde, $f$ es una función continua arbitraria.

**Ejemplo 1.** Sea la ecuación

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-3}{x-y-1}.$$

Para transformarla en una ecuación homogénea hacemos la sustitucion: $x=x_1+h$; $y=y_1+k$. Entonces,

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1+h+k-3}{x_1-y_1+h-k-1}.$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones

$$h+k-3=0; \quad h-k-1=0,$$

encontramos:

$$h=2, \quad k=1.$$

Como resultado obtenemos la ecuación homogénea

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1}{x_1-y_1},$$

que resolvemos mediante la sustitución $\frac{y_1}{x_1}=u$; entonces,

$$y_1=ux_1,\ \frac{dy_1}{dx_1}=u+x_1\frac{du}{dx_1};\quad u+x_1\frac{du}{dx_1}=\frac{1+u}{1-u},$$

y obtenemos una ecuación con variables separables

$$x_1\frac{du}{dx_1}=\frac{1+u^2}{1-u}.$$

Separamos las variables:

$$\frac{1-u}{1+u^2}\,du=\frac{dx_1}{x_1}.$$

Integrando, hallamos:

$$\operatorname{arctg} u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln x_1+\ln C,$$

$$\operatorname{arctg} u=\ln\left(Cx_1\sqrt{1+u^2}\right)$$

o

$$Cx_1\sqrt{1+u^2}=e^{\operatorname{arctg} u}.$$

Sustituyendo $u$ por $\frac{y_1}{x_1}$ en la última igualdad, tenemos:

$$C\sqrt{x_1^2+y_1^2}=e^{\operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1}}.$$

Por fin pasando a las variables $x$ e $y$, obtenemos en definitiva:

$$C\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=e^{\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-2}}.$$

**Ejemplo 2.** La ecuación

$$y'=\frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$$

no se puede resolver mediante la sustitución $x=x_1+h$, $y=y_1+k$, puesto que en este caso el sistema de ecuaciones, que sirve para determinar $h$ y $k$, es irresoluble (aquí, el determinante $\begin{vmatrix}2&1\\4&2\end{vmatrix}$ de los coeficientes de las variables es igual a cero).

Se puede reducir esta ecuación a una ecuación con variables separables mediante la sustitución:

$$2x+y=z.$$

Entonces $y'=z'-2$ y la ecuación se reduce a la forma:

$$z'-2=\frac{z-1}{2z+5},$$

o sea,

$$z'=\frac{5z+9}{2z+5}$$

Resolviéndola, encontramos:

$$\frac{2}{5}z+\frac{7}{25}\ln|5z+9|=x+C.$$

Como $z=2x+y$, obtenemos la solución definitiva de la ecuación inicial en la forma:

$$\frac{2}{5}(2x+y)+\frac{7}{25}\ln|10x+5y+9|=x+C$$

ó

$$10y-5x+7\ln|10x+5y+9|=C_1,$$

es decir, en la forma de una función implícita $y$ de $x$.

## § 7. ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

**Difinición.** La ecuación que es lineal respecto a la función desconocida y su derivada, se llama *ecuación lineal de primer orden.* La ecuación tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x), \tag{1}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas dadas de $x$ (o constantes).

**Resolución de la ecuación lineal (1).** Busquemos la solución de la ecuación (1) en la forma de un producto de dos funciones de $x$:

$$y=u(x)\,v(x). \tag{2}$$

Se puede tomar arbitrariamente una de estas funciones, la otra se determinará entonces según la ecuación (1).

Derivando los dos miembros de la igualdad (2) encontramos:

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}.$$

Poniendo la expresión obtenida de la dervada $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación (1), tenemos:

$$u\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}v+Puv=Q$$

ó

$$u\left(\frac{dv}{dx}+Pv\right)+v\frac{du}{dx}=Q. \tag{3}$$

Elijamos la función $v$ de tal manera que

$$\frac{dv}{dx}+Pv=0. \tag{4}$$

Separando las variables en esta ecuación diferencial respecto a la función $v$, encontramos:

$$\frac{dv}{v} = -P\,dx.$$

Integrando, obtenemos:

$$-\ln C_1 + \ln v = -\int P\,dx$$

ó

$$v = C_1 e^{-\int P\,dx}$$

Puesto que es suficiente tener una solución cualquiera, distinta de cero, de la ecuación (4), tomemos por la función $v(x)$:

$$vx = e^{-\int P\,dx}, \tag{5}$$

donde $\int P\,dx$ es una función primitiva cualquiera. Es evidente que $v(x) \neq 0$. Sustituyendo el valor encontrado de $v(x)$ en la ecuación (3), obtenemos $\left(\text{teniendo en cuenta que } \frac{dv}{dx} + Pv = 0\right)$

$$v(x)\frac{du}{dx} = Q(x),$$

o sea,

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)},$$

de donde:

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + C.$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (2) obtenemos en definitiva:

$$y = v(x)\left[\int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + C\right],$$

o

$$y = v(x)\int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + Cv(x). \tag{6}$$

**Observación:** Es evidente que la expresión (6) no variará, si, en lugar de la función $v(x)$ determinada por la ecuación (5), tomamos alguna otra función $v_1(x) = \overline{C}v(x)$. En efecto, sustituyendo en (6)

$v(x)$ por $v_1(x)$, obtenemos:

$$y=\overline{C}v(x)\int\frac{Q(x)}{\overline{C}v(x)}\,dx+C\overline{C}v(x).$$

En el primer término se elimina $\overline{C}$, en el segundo término el producto $C\overline{C}$ es una constante arbitraria la que designemos por $C$ y regresamos de nuevo a la expresión (6). Si designamos:

$$\int\frac{Q(x)}{v(x)}\,dx=\varphi(x)$$

la expresión (6) toma la forma

$$y=v(x)\,\varphi(x)+Cv(x). \qquad (6')$$

Es evidente que (6') es la integral general, puesto que se puede elegir $C$ de tal modo que se satisfaga la condición inicial $y=y_0$ para $x=x_0$.

El valor de $C$ se determina de la ecuación:

$$y_0=v(x_0)\,\varphi(x_0)+Cv(x_0).$$

**Ejemplo.** Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}\,y=(x+1)^3.$$

**Solución.** Hagamos:

$$y=uv.$$

Entonces:

$$\frac{dy}{dx}=u\,\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}\,v.$$

Introduciendo la expresión $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación inicial, tenemos:

$$u\,\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}\,v-\frac{2}{x+1}\,uv=(x+1)^3,$$

$$u\left(\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x+1}\,v\right)+v\,\frac{du}{dx}=(x+1)^3. \qquad (7)$$

Para determinar $v$, obtenemos la ecuación:

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x+1}\,v=0,$$

es decir,

$$\frac{dv}{v}=\frac{2\,dx}{x+1},$$

de donde:

$$\ln v=2\ln(x+1),$$

o sea

$$v=(x+1)^2.$$

Introduciendo la expresión de la función $v$ en la ecuación (7) obtenemos la ecuación para determinar $u$,

$$(x+1)^2\frac{du}{dx}=(x+1)^3$$

ó

$$\frac{du}{dx}=(x+1),$$

de donde:

$$u=\frac{(x+1)^2}{2}+C.$$

Por consiguiente, la integral general de la ecuación dada tendrá la forma:

$$y=\frac{(x+1)^4}{2}+C\,(x+1)^2.$$

La familia obtenida es la solución general. Cualquiera que sea la condición inicial $(x_0, y_0)$, donde $x_0 \neq -1$, siempre se puede elegir $C$ de tal manera que la solución particular correspondiente satisfaga la condición inicial dada. Por ejemplo, la solución particular que satisface la condición $y_0 = 3$ para $x_0 = 0$ se encuentra del modo siguiente:

$$3=\frac{(0+1)^4}{2}+C\,(0+1)^2;\quad C=\frac{5}{2}.$$

Por tanto, la solución particular buscada es:

$$y=\frac{(x+1)^4}{2}+\frac{5}{2}(x+1)^2.$$

Sin embargo, si se toma la condición inicial $(x_0, y_0)$ de modo tal que $x_0 = -1$, entonces no será posible encontrar una solución particular que satisfaga esta condición. Esto se explica por el hecho de que la función $P(x) = -\frac{2}{x+1}$ es discontinua en el punto $x_0 = -1$ y, por tanto, no se cumplen las condiciones del teorema de la existencia de la solución.

## § 8. ECUACION DE BERNOULLI

Estudiemos una ecuación de la forma*)

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x)\,y^n, \tag{1}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas de $x$ (o constantes), y, $n \neq 0$, $n \neq 1$ (en el caso contrario resulta una ecuación lineal).

---

*) Esta ecuación se reduce del problema sobre el movimiento de un cuerpo, si la resistencia $F$ del medio depende de la velocidad: $F=\lambda_1 v+\lambda_2 v^n$. La ecuación del movimiento será $m\frac{dv}{dt}=-\lambda_1 v-\lambda_2 v^n$, ó $\frac{dv}{dt}+\frac{\lambda_1}{m}v=-\frac{\lambda_2}{m}v^n$.

Esta ecuación, llamada *de Bernoulli*, se reduce a una ecuación lineal mediante la siguiente transformación:

Dividiendo todos los términos de la ecuación por $y^n$, obtenemos:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+Py^{-n+1}=Q. \tag{2}$$

Efectuemos ahora la sustitución:

$$z=y^{-n+1}.$$

Entonces,

$$\frac{dz}{dx}=(-n+1)\,y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (2), obtenemos una ecuación lineal:

$$\frac{dz}{dx}+(-n+1)\,Pz=(-n+1)\,Q.$$

Al encontrar su integral general, y sustituyendo $z$ por su expresión $y^{-n+1}$, obtenemos la integral general de la ecuación de Bernoulli.

**Ejemplo.** Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3. \tag{3}$$

**Solución.** Dividiendo todos los términos por $y^3$, tenemos:

$$y^{-3}y'+xy^{-2}=x^3. \tag{4}$$

Introduzcamos una nueva función:

$$z=y^{-2},$$

entonces,

$$\frac{dz}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (4), obtenemos la ecuación lineal:

$$\frac{dz}{dx}-2xz=-2x^3. \tag{5}$$

Hallemos ahora su integral general:

$$z=uv;\quad \frac{dz}{dx}=u\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}v.$$

Sustituyendo las expresiones de $z$ y $\frac{dz}{dx}$ en la ecuación (5), obtenemos:

$$u\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}v-2xuv=-2x^3$$

$$u\left(\frac{dv}{dx}-2xv\right)+v\frac{du}{dx}=-2x^3.$$

Igualemos a cero la expresión entre paréntesis:

$$\frac{dv}{dx}-2xv=0; \qquad \frac{dv}{v}=2x\,dx;$$

$$\ln v=x^2; \qquad v=e^{x^2}.$$

Para determinar $u$ obtengamos la ecuación:

$$e^{x^2}\frac{du}{dx}=-2x^3.$$

Separemos las variables:

$$du=-2e^{-x^2}x^3\,dx, \quad u=-2\int e^{-x^2}x^3\,dx+C.$$

Integrando por partes, encontramos:

$$u=x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+C; \quad z=uv=x^2+1+Ce^{-x^2}.$$

Por consiguiente, la integral general de la ecuación dada es:

$$y^{-2}=x^2+1+Ce^{-x^2}, \quad \text{o sea:} \quad y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1+Ce^{-x^2}}}.$$

**Observación.** Análogamente a lo que hemos hecho en el caso de las ecuaciones lineales se puede demostrar que es posible buscar la solución de la ecuación de Bernoulli en la forma de producto de dos funciones:

$$y=u\,(x)\,v\,(x),$$

donde $v\,(x)$ es una función arbitraria distinta de cero, que satisface la ecuación $v'+Pv=0$.

## § 9. ECUACIONES EN DIFERENCIALES TOTALES

**Definición.** La ecuación

$$M\,(x,\,y)\,dx+N\,(x,\,y)\,dy=0, \tag{1}$$

se llama *ecuación en diferenciales totales*, si $M\,(x,\,y)$ y $N\,(x,\,y)$ son funciones continuas y derivables para las que se cumple la correlación:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}, \tag{2}$$

siendo $\frac{\partial M}{\partial y}$ y $\frac{\partial N}{\partial x}$ continuas en un cierto dominio.

**Integración de las ecuaciones en diferenciales totales.** Demostremos que si el primer miembro de la ecuación (1) es una diferencial total, se cumple la condición (2), y, viceversa, si se cumple la

condición (2), entonces el primer miembro de la ecuación (1) es la diferencial total de cierta función $u(x, y)$, es decir, la ecuación (1) *tiene la forma:*

$$du(x, y) = 0 \tag{3}$$

y, por tanto, su integral general es $u(x, y) = C$.

Supongamos, primeramente, que el primer miembro de la ecuación (1) sea diferencial total de cierta función $u(x, y)$, es decir,

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy;$$

entonces:

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad N = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4}$$

Derivando la primera relación respecto a $y$, y la segunda, respecto a $x$, tenemos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}; \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}.$$

Suponiendo que las segundas derivadas son continuas, tenemos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

es decir, la igualdad (2) es condición necesaria para que el primer miembro de la ecuación (1) sea diferencial total de cierta función $u(x, y)$. Mostremos que esta condición será también **suficiente**, es decir, si se cumple la igualdad (2), el primer miembro de la ecuación (1) es diferencial total de cierta función $u(x, y)$.

De la relación

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$$

hallamos que:

$$u = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \varphi(y),$$

donde $x_0$ es la abscisa de un punto arbitrario en el dominio de existencia de la solución.

Integrando respecto a $x$, supongamos $y$ constante. Por eso, la constante arbitraria de integración puede depender de $y$. Eligamos la función $\varphi(y)$ de tal modo que se cumpla la segunda de las corre-

laciones (4). Para esto derivemos*) ambos miembros de la última igualdad respecto a $y$ e igualamos el resultado a $N(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}\,dx+\varphi'(y)=N(x,\ y);$$

Pero, como $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$, se puede escribir:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N}{\partial x}\,dx+\varphi'(y)=N,\quad \text{es decir,}\quad N(x,\ y)\Big|_{x_0}^{x}+\varphi'(y)=N(x,\ y),$$

ó

$$N(x,\ y)-N(x_0,\ y)+\varphi'(y)=N(x,\ y).$$

Por tanto,

$$\varphi'(y)=N(x_0,y),$$

ó

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y}N(x_0,\ y)\,dy+C_1.$$

Así pues, la función $u(x, y)$ tomará la forma:

$$u=\int_{x_0}^{x}M(x,\ y)\,dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,\ y)\,dy+C_1.$$

Aquí, $P(x_0, y_0)$ es un punto en cuya vecindad existe la solución de la ecuación diferencial (1).

Igualando esta expresión a una constante arbitraria $C$, obtenemos la integral general de la ecuación (1):

$$\int_{x_0}^{x}M(x,\ y)\,dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,\ y)\,dy=C. \tag{5}$$

**Ejemplo.** Sea la ecuación

$$\frac{2x}{y^3}\,dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}\,dy=0.$$

---

*) La integral $\int_{x_0}^{x}M(x,\ y)\,dx$ depende de $y$. Para hallar la derivada de esta integral respecto a $y$, es preciso derivar respecto a $y$ el integrando:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}M(x,\ y)\,dx=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}\,dx.$$

Ello se deduce del teorema de Leibniz sobre la derivación de una integral definida respecto a un parámetro. (Véase § 10, cap. XI, tomo I)

Averigüemos si esta ecuación está dada en diferenciales totales. Designemos:

$$M=\frac{2x}{y^3}; \quad N=\frac{y^2-3x^2}{y^4};$$

entonces,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{6x}{y^4}; \quad \frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{6x}{y^4}.$$

Para $y\neq 0$ se cumple la condición (2). Por tanto, el primer miembro de la ecuación dada es la diferencial total de cierta función desconocida $u(x, y)$. Hallamos esta función.

Puesto que $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y^3}$, resulta:

$$u=\int \frac{2x}{y^3}\,dx+\varphi(y)=\frac{x^2}{y^3}+\varphi(y),$$

donde $\varphi(y)$ es una función de $y$, que es preciso determinar.

Derivando respecto a $y$ esta relación y tomando en cuenta que

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N=\frac{y^2-3x^2}{y^4},$$

hallamos:

$$-\frac{3x^2}{y^4}+\varphi'(y)=\frac{y^2-3x^2}{y^4};$$

Por consiguiente,

$$\varphi'(y)=\frac{1}{y^2}, \quad \varphi(y)=-\frac{1}{y}+C_1, \quad u(x, y)=\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}+C_1.$$

Así, la integral general de la ecuación inicial es:

$$\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C.$$

## § 10. FACTOR INTEGRANTE

Suponemos que el primer miembro de la ecuación

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0 \tag{1}$$

no es una diferencial total. Se logra a veces elegir una función $\mu(x, y)$ tal que, si multiplicamos todos los términos de la ecuación por esta función, el primer miembro se convierte en una diferencial total. La solución general de la ecuación así obtenida coincide con la solución general de la ecuación inicial; la función $\mu(x, y)$ se llama *factor integrante* de la ecuación (1).

Para hallar un factor integrante $\mu$ procedemos del modo siguiente: multipliquemos los dos miembros de la ecuación dada por el factor integrante $\mu$, por ahora desconocido:

$$\mu M\,dx+\mu N\,dy=0.$$

Para que la última ecuación esté dada en diferenciales totales es necesario y suficiente que se cumpla la relación

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

es decir,

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial \mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial \mu}{\partial x},$$

o sea

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y}-N\frac{\partial \mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Al dividir por $\mu$ los dos miembros de la última ecuación, obtenemos:

$$M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y}-N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}. \qquad (2)$$

Es evidente que toda función $\mu(x, y)$ que satisface la última ecuación es un factor integrante de la ecuación (1).

La ecuación (2) es una ecuación en derivadas parciales con una función desconocida $\mu$, dependiente de dos variables $x$ e $y$. Se puede demostrar que en ciertas condiciones la ecuación posee una infinidad de soluciones y, por tanto, la ecuación (1) tiene el factor integrante. Pero en el caso general el problema de la búsqueda de $\mu(x, y)$ de la ecuación (2) es más difícil que el de integrar la ecuación (1). Sólo en algunos casos particulares se logra determinar la función $\mu(x, y)$.

Supongamos, por ejemplo, que la ecuación (1) admita un factor integrante que **depende sólo** de $y$. Entonces,

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x}=0,$$

y para hallar $\mu$ obtenemos una ecuación diferencial **ordinaria:**

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y}=\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M},$$

de la que se determina (por medio de una cuadratura) $\ln \mu$ y, por tanto, el propio $\mu$. Es evidente, que de esta manera se puede proceder sólo cuando la expresión $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}$ no depende de $x$.

Análogamente, si la expresión $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{N}$ no depende de $y$, sino exclusivamente de $x$, es fácil hallar el factor integrante que **depende solamente de $x$.**

**Ejemplo.** Hallar la solución de la ecuación

$$(y+xy^2)\,dx-x\,dy=0.$$

*Solución.* Aquí: $M=y+xy^2$; $N=-x$;

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1+2xy;\quad \frac{\partial N}{\partial x}=-1;\quad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Por consiguiente, el primer miembro de la ecuación **no es** diferencial total. Examinemos si esta ecuación admite un factor integrante que depende sólo de $y$. Notemos que

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{-1-1-2xy}{y+xy^2}=-\frac{2}{y},$$

concluimos que la ecuación lo admite. Encontremos ahora este factor integrante:

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}=-\frac{2}{y};$$

de donde:

$$\ln\mu=-2\ln y,\quad \text{es decir}\quad \mu=\frac{1}{y^2}.$$

Después de multiplicar todos los términos de la ecuación dada por el factor integrante determinado $\mu$ obtenemos la ecuación $\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\frac{x}{y^2}\,dy=0$ en diferenciales totales $\left(\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}\right)$. Resolviéndola, encontramos su integral general:

$$\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}+C=0,$$

o

$$y=-\frac{2x}{x^2+2C}.$$

## § 11. ENVOLVENTE DE UNA FAMILIA DE CURVAS

**Sea dada una ecuación de la forma**

$$\Phi(x,\ y,\ C)=0, \tag{1}$$

**donde $x$ e $y$ son las coordenadas variables de Descartes y $C$, un parámetro que pueda tomar diferentes valores fijados.**

Para cada valor dado del parámetro $C$ la ecuación (1) determina cierta **curva** en el plano $Oxy$. Dando a $C$ todos los valores posibles obtenemos una **familia de curvas** que dependen de un solo parámetro, o, como suele decirse, una familia de curvas monoparamétrica. Así, la ecuación (1) es la ecuación de una **familia de curvas monoparamétrica** (puesto que contiene una sola constante arbitraria).

**Definición.** La línea $L$ se llama *envolvente* de una familia de curvas monoparamétrica, si en cada uno de sus puntos toca una u otra

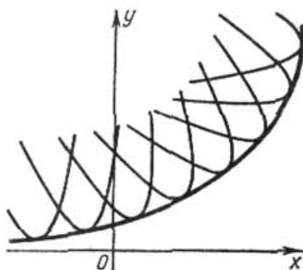



*Fig. 250*

curva de la familia, y también, diferentes curvas de la familia dada tocan la línea $L$ en distintos puntos (fig. 250).

**Ejemplo 1.** Examinemos la familia de curvas

$$(x-C)^2+y^2=R^2,$$

donde $R$ es una constante, y $C$, un parámetro.

Es la ecuación de una familia de circunferencias de radio $R$ y centros en el eje $Ox$. Es evidente que esta familia admite como envolventes las rectas $y=R$, $y=-R$ (fig. 251).

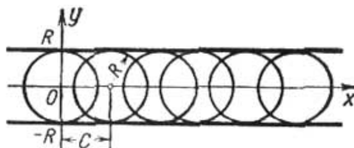



*Fig. 251*

**Búsqueda de la ecuación de la envolvente de una familia dada.** Sea la familia de curvas

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{1}$$

que dependen de un parámetro $C$.

Supongamos que esta familia tenga una envolvente cuya ecuación se puede escribir en la forma $y = \varphi(x)$, donde $\varphi(x)$ es una función continua y derivable de $x$. Examinemos un punto $M(x, y)$ que se halla en la envolvente. Este punto pertenece, también, a cierta curva de la familia (1). A esta curva corresponde un valor determinado del parámetro $C$, este valor para dadas $(x, y)$ se define de la ecuación (1) $C = C(x, y)$. Por tanto, para todos los puntos de la envolvente se verifica la igualdad

$$\Phi(x, y, C(x, y)) = 0. \tag{2}$$

Supongamos que $C(x, y)$ sea función derivable, no constante en ningún intervalo de los valores estudiados de $x$, $y$. Partiendo de la ecuación (2) de la envolvente, encontremos el coeficiente angular de la tangente a la envolvente en el punto $M(x, y)$. Derivemos la ecuación (2) respecto a $x$, considerando $y$ como función de $x$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial x} + \left[\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial y}\right] y' = 0$$

ó

$$\Phi'_x + \Phi'_y y' + \Phi'_C \left[\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y'\right] = 0. \tag{3}$$

Luego, el coeficiente angular de la tangente a la curva de la familia (1) en el punto $M(x, y)$ se deduce de la ecuación:

$$\Phi'_x + \Phi'_y y' = 0 \tag{4}$$

(en la curva dada $C$ es constante).

Supongamos que $\Phi'_y \neq 0$; en caso contrario consideremos $x$ como la función e $y$, como el argumento. Puesto que el coeficiente angular $k$ de la envolvente es igual al de la curva de la familia, de las ecuaciones (3) y (4) se deduce:

$$\Phi'_C \left[\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y'\right] = 0.$$

Pero como $C(x, y) \neq$ const en la envolvente, entonces:

$$\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \neq 0,$$

por lo que para sus puntos es válida la igualdad:

$$\Phi'_C(x, y, C) = 0. \tag{5}$$

Así, para determinar la envolvente sirven las dos ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned}\Phi(x,\ y,\ C)=0,\\ \Phi'_C(x,\ y,\ C)=0.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Si, eliminando $C$ de estas ecuaciones, obtenemos $y = \varphi(x)$, donde $\varphi(x)$ es una función derivable, siendo $C \neq$ const en esta curva, entonces $y = \varphi(x)$ es la ecuación de la envolvente.

**Observación 1.** Si una función $y = \varphi(x)$ es la ecuación del lugar geométrico de *puntos singulares* de la familia (1), es decir, de los puntos donde $\Phi'_x = 0$ y $\Phi'_y = 0$, entonces las coordenadas de estos puntos también satisfacen las ecuaciones (6).

En efecto, las coordenadas de los puntos singulares se pueden expresar en función del parámetro $C$ que entra en la ecuación (1):

$$x = \lambda(C), \quad y = \mu(C). \qquad (7)$$

Poniendo estas expresiones en la ecuación (1), obtenemos una identidad respecto a $C$:

$$\Phi[\lambda(C), \quad \mu(C),\ C] = 0.$$

Derivando esta identidad respecto a $C$, obtenemos:

$$\Phi'_x\frac{d\lambda}{dC}+\Phi'_y\frac{d\mu}{dC}+\Phi'_C=0;$$

puesto que para los puntos cualesquiera se cumplen las igualdades $\Phi'_x = 0$, $\Phi'_y = 0$, para estos puntos se cumple, también, la ecuación $\Phi'_C = 0$.

De esta manera hemos demostrado que las coordenadas de los puntos singulares satisfacen las ecuaciones (6).

Así, las ecuaciones (6) definen la envolvente, o bien el lugar geométrico de los puntos singulares de la familia (1), o bien la combinación de ambas cosas. Por consiguiente, al obtener una curva que satisface las ecuaciones (6), hace falta realizar un estudio con el objeto de determinar, si esta curva es envolvente o lugar geométrico de los puntos singulares.

**Ejemplo 2.** Hallar la envolvente de la familia de circunferencias

$$(x - C)^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

que dependen de un solo parámetro $C$.

**Solución.** Derivando la ecuación de la familia respecto a $C$, tenemos:

$$2(x - C) = 0.$$

Eliminando $C$ de estas dos ecuaciones, obtenemos la ecuación:

$$y^2 - R^2 = 0 \text{ ó } y = \pm R.$$

De consideraciones geométricas resulta que el par de rectas obtenido es la **envolvente** (y no lugar geométrico de los puntos singulares, puesto que las circunferencias que integran la familia no tienen puntos singulares).

**Ejemplo 3.** Hallar la envolvente de la familia de las rectas:

$$x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha - p = 0 \qquad \text{(a)}$$

donde, $\alpha$ es un parámetro.

**Solución.** Derivando respecto a $\alpha$ la ecuación dada de la familia, tenemos:

$$-x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha = 0. \qquad \text{(b)}$$

Para eliminar el parámetro $\alpha$ de las ecuaciones (a) y (b), multipliquemos los términos de la primera ecuación por $\cos\alpha$ y los términos de la segunda,

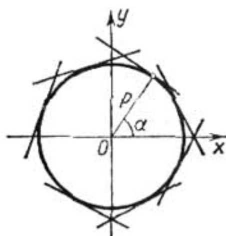



*Fig. 252*

por $\operatorname{sen}\alpha$. Luego restamos la segunda ecuación de la primera. En este caso *obtenemos:*

$$x = p \cos\alpha.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (b), hallamos:

$$y = p \operatorname{sen}\alpha.$$

Elevando al cuadrado los miembros de las dos últimas ecuaciones y sumándolas miembro a miembro obtenemos:

$$x^2 + y^2 = p^2.$$

Es la ecuación de una circunferencia que sirve de **envolvente** de la familia de rectas (y no lugar geométrico de los puntos singulares, puesto que las rectas no tienen estos puntos) (fig. 252).

**Ejemplo 4.** Hallar la envolvente de las trayectorias de los proyectiles lanzados, por una pieza de artillería, con velocidad $v_0$ bajo diferentes ángulos de inclinación del cañón respecto al horizonte. Supongamos que los proyectiles son lanzados desde el origen de coordenadas y que sus trayectorias se hallan en el plano $Oxy$ (despreciando la resistencia del aire).

**Solución.** Hallemos al principio la ecuación de la trayectoria de un proyectil lanzado bajo el ángulo $\alpha$ en la dirección positiva del eje $Ox$. Durante su vuelo *el proyectil participa simultáneamente en dos movimientos:* un movimiento uniforme en la dirección del lanzamiento, con velocidad $v_0$; y otro movimiento de caída por acción de la fuerza de gravedad.

De consideraciones geométricas resulta que el par de rectas obtenido es la **envolvente** (y no lugar geométrico de los puntos singulares, puesto que las circunferencias que integran la familia no tienen puntos singulares).

**Ejemplo 3.** Hallar la envolvente de la familia de las rectas:

$$x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - p = 0 \tag{a}$$

donde, $\alpha$ es un parámetro.

**Solución.** Derivando respecto a $\alpha$ la ecuación dada de la familia, tenemos:

$$-x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha = 0. \tag{b}$$

Para eliminar el parámetro $\alpha$ de las ecuaciones (a) y (b), multipliquemos los términos de la primera ecuación por $\cos \alpha$ y los términos de la segunda,

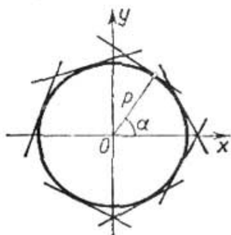



*Fig. 252*

por $\operatorname{sen} \alpha$. Luego restamos la segunda ecuación de la primera. En este caso obtenemos:

$$x = p \cos \alpha.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (b), hallamos:

$$y = p \operatorname{sen} \alpha.$$

Elevando al cuadrado los miembros de las dos últimas ecuaciones y sumándolas miembro a miembro obtenemos:

$$x^2 + y^2 = p^2.$$

Es la ecuación de una circunferencia que sirve de **envolvente** de la familia de rectas *(y no lugar geométrico de los puntos singulares, puesto que las* rectas no tienen estos puntos) (fig. 252).

**Ejemplo 4.** Hallar la envolvente de las trayectorias de los proyectiles lanzados, por una pieza de artillería, con velocidad $v_0$ bajo diferentes ángulos de inclinación del cañón respecto al horizonte. Supongamos que los proyectiles son lanzados desde el origen de coordenadas y que sus trayectorias se hallan en el plano $Oxy$ (despreciando la resistencia del aire).

**Solución.** Hallemos al principio la ecuación de la trayectoria de un proyectil lanzado bajo el ángulo $\alpha$ en la dirección positiva del eje $Ox$. Durante su vuelo el proyectil participa simultáneamente en dos movimientos: un movimiento uniforme en la dirección del lanzamiento, con velocidad $v_0$; y otro movimiento de caída por acción de la fuerza de gravedad.

Por eso, a cada instante $t$, la posición del proyectil $M$ (fig. 253) está definida por las ecuaciones:

$$x = v_0 t \cos\alpha,$$

$$y = v_0 t \operatorname{sen}\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Estas son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria (el parámetro es el tiempo $t$).

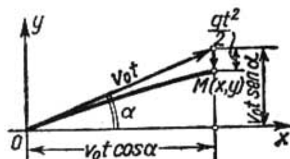



*Fig. 253*

Eliminando $t$, obtenemos la ecuación de la trayectoria en la siguiente forma:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha};$$

e introduciendo las designaciones: $\operatorname{tg}\alpha = k$, $\frac{g}{2v_0^2} = a$, obtenemos:

$$y = kx - ax^2(1 + k^2). \tag{8}$$

Esta ecuación define una parábola con el eje vertical, que pasa por el origen de coordenadas y las ramas dirigidas hacia abajo. Para distintos valores de $k$ obtenemos trayectorias diferentes. La ecuación (8), por consiguiente,

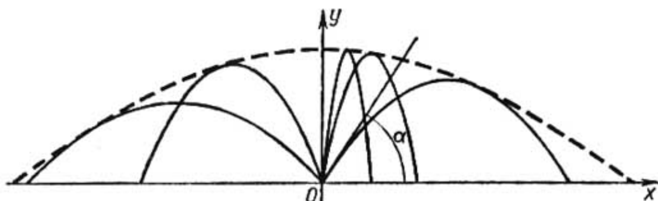



*Fig. 254*

es la ecuación de una familia monoparamétrica de parábolas que son las trayectorias del proyectil a diferentes ángulos $\alpha$, con una velocidad inicial dada $v_0$ (fig. 254).

Hallemos la envolvente de esta familia de parábolas.

Derivando respecto a $k$ ambos miembros de la ecuación (8), tenemos:

$$x - 2akx^2 = 0. \tag{9}$$

Eliminando $k$ de las ecuaciones (8) y (9), obtenemos:

$$y=\frac{1}{4a}-ax^2.$$

Es la ecuación de una parábola con el vértice en el punto $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$, cuyo eje coincide con el $Oy$. Esta ecuación no es un lugar geométrico de los puntos

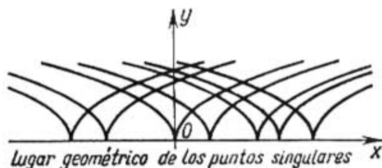



*Fig. 255*

singulares (puesto que las parábolas (8) no tiene puntos singulares). Así, la parábola

$$y=\frac{1}{4a}-ax^2$$

es envolvente para la familia de trayectorias. Se llama **parábola de seguridad**, puesto que ningun punto situado fuera de sus límites puede ser alcanzado por un proyectil lanzado de este cañón dado con la velocidad inicial $v_0$.

**Ejemplo 5.** Hallar la envolvente de la familia de parábolas semicúbicas

$$y^3-(x-C)^2=0.$$

**Solución.** Derivemos la ecuación dada de la familia respecto al parámetro $C$:

$$2(x-C)=0.$$

Eliminando el parámetro $C$ de ambas ecuaciones, obtenemos:

$$y=0.$$

El eje $Ox$ es un lugar geométrico de los puntos singulares: los de retroceso de primera especie (fig. 255). En efecto, hallemos los puntos singulares de la curva

$$y^3-(x-C)^2=0,$$

fijando el valor de $C$. Derivando respecto a $x$ e $y$, hallamos:

$$F'_x=-2(x-C)=0;$$
$$F'_y=3y^2=0.$$

Resolviendo simultáneamente las tres ecuaciones anteriores, hallamos las coordenadas de un punto singular: $x=C$, $y=0$. Por tanto, cada curva de la familia dada tiene un punto singular en el eje $Ox$. Si el parámetro $C$ varía continuamente, los puntos singulares llenan todo el eje $Ox$.

**Ejemplo 6.** Hallar la envolvente y el lugar geométrico de los puntos singulares de la familia:

$$(y-C)^2-\frac{2}{3}(x-C)^3=0. \tag{10}$$

**Solución.** Derivando respecto a $C$ ambos miembros de la ecuación (10), encontramos:

$$-2(y-C)+\frac{2}{3}3(x-C)^2=0$$

ó

$$y-C-(x-C)^2=0. \tag{11}$$

Eliminemos ahora el parámetro $C$ de las ecuaciones (10) y (11). Poniendo la expresión

$$y-C=(x-C)^2$$

en la ecuación (10), obtenemos:

$$(x-C)^4-\frac{2}{3}(x-C)^3=0,$$

ó

$$(x-C)^3\left[(x-C)-\frac{2}{3}\right]=0,$$

de donde obtenemos dos valores posibles de $C$ a los que corresponden dos soluciones del problema.

Primera solución:

$$C=x;$$

por eso, de la ecuación (11) encontramos:

$$y-x-(x-x)^2=0$$

ó

$$y=x$$

Segunda solución:

$$C=x-\frac{2}{3};$$

por eso, de la ecuación (11) encontramos:

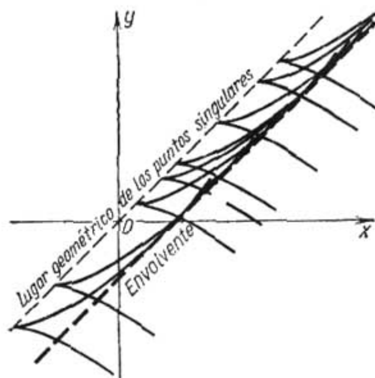
$$y-x+\frac{2}{3}-\left[x-x+\frac{2}{3}\right]^2=0$$

ó

$$y=x-\frac{2}{9}.$$

Hemos obtenido dos rectas: $y=x$ e $y=x-\frac{2}{9}$. La primera de ellas es el lugar geométrico de los puntos singulares, la segunda es envolvente (fig. 256).

**Observación 2.** Hemos demostrado en el § 7, cap. VI, que las normales a una curva son las tangentes a la evoluta de esta curva. Por consiguiente, la familia de las normales a una curva dada es al mismo tiempo la familia de las tangentes a su evoluta. Así, la **evoluta de una curva es la envolvente de la familia de las normales a esta curva** (fig. 257).



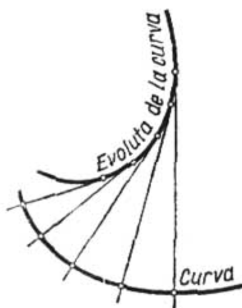




Fig. 256

Fig. 257

La observación dada permite utilizar un método más para hallar la evoluta: para obtener la ecuación de la evoluta es preciso hallar al principio la familia de todas las normales a la curva dada y después *encontrar* la envolvente de esta familia.

## § 12. SOLUCIONES SINGULARES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Supongamos que la ecuación diferencial

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0 \qquad (1)$$

tenga la integral general

$$\Phi\ (x,\ y,\ C)=0. \qquad (2)$$

**Supongamos también que la familia de las curvas integrales, correspondiente a la ecuación (2), tiene una envolvente. Demostremos que esta envolvente es también una curva integral de la ecuación diferencial (1).**

**En efecto, la envolvente toca en cada uno de sus puntos a cierta curva de la familia, es decir, la envolvente tiene en este punto una tangente común con la curva. Por consiguiente, en cada punto común la envolvente y la curva de la familia tienen valores iguales de las magnitudes $x$, $y$, $y'$.**

**Pero, para la curva de la familia las magnitudes $x$, $y$, $y'$ satisfacen la ecuación (1). Por tanto, la abscisa, la ordenada y el coeficiente angular de cada punto de la envolvente satisfacen también la misma ecuación lo que significa que la envolvente es una curva**

integral y que su ecuación es una solución de la ecuación diferencial dada. Pero, como la envolvente no es en general una curva de la familia, su ecuación no se puede deducir de la integral general (2), cualquiera que sea el valor particular de $C$. La solución de la ecuación diferencial que no se obtiene de la integral general cualquiera que sea el valor de $C$, y que tiene como gráfica la envolvente de la familia de curvas integrales que entran en la solución general, se llama *solución singular* de la ecuación diferencial.

Suponemos conocida la integral general

$$\Phi(x, y, C) = 0;$$

eliminando $C$ de esta ecuación y de la ecuación $\Phi'_C(x, y, C) = 0$ obtenemos la ecuación $\psi(x, y) = 0$. Si esta función satisface la ecuación diferencial (y no pertenece a la familia (2)), entonces es *la integral singular*.

Notemos que por todo punto de la curva que represente la solución singular pasan por lo menos dos curvas integrales, es decir, **la unicidad de la solución se perturba en cada punto de una solución singular.**

**Ejemplo.** Hallar la solución singular de la ecuación

$$y^2(1 + y'^2) = R^2. \qquad (*)$$

**Solución.** Hallemos su integral general. Resolvamos la ecuación respecto a $y'$:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}.$$

Separando las variables, obtenemos:

$$\frac{y\,dy}{\pm\sqrt{R^2 - y^2}} = dx.$$

De aquí, integrando, encontramos la integral general:

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2.$$

Es fácil ver que la familia de curvas integrales es la de circunferencias de radio $R$, con centros en el eje de las abscisas. La envolvente de esta familia de curvas está dada por las dos rectas $y = \pm R$.

Las funciones $y = \pm R$ satisfacen la ecuación diferencial (*), de donde se deduce que es la integral singular.

## § 13. ECUACION DE CLAIRAUT

Examinemos la ecuación

$$y = x\frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right), \qquad (1)$$

*llamada de Clairaut.*

Esta se integra introduciendo un parámetro auxiliar. Hagamos $\frac{dy}{dx}=p$, entonces la ecuación (1) toma la forma:

$$y = xp + \psi(p). \qquad (1')$$

Derivemos todos los **términos** de la última ecuación respecto a $x$, *teniendo en cuenta que* $p=\frac{dy}{dx}$ *es una función de* $x$:

$$p = x\frac{dp}{dx} + p + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

ó

$$[x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0.$$

Igualando a cero cada factor, obtenemos:

$$\frac{dp}{dx} = 0, \qquad (2)$$

y

$$x + \psi'(p) = 0. \qquad (3)$$

1) La integración de la igualdad (2) da $p = C$ ($C$ = const.). Poniendo este valor de $p$ en la ecuación (1′) encontramos su integral general:

$$y = xC + \psi(C), \qquad (4)$$

que, desde el punto de vista geométrico, representa una **familia de rectas**.

2) De la ecuación (3) encontremos $p$ como función de $x$, y pongámoslo en la ecuación (1′), entonces obtenemos la función:

$$y = xp(x) + \psi[p(x)], \qquad (1'')$$

la cual es una solución de la ecuación (1), lo que es muy fácil demostrar.

En efecto, en virtud de la igualdad (3) tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = p + [x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} = p.$$

Por eso, introduciendo la función (1″) en la ecuación (1), obtenemos la identidad:

$$xp + \psi(p) = xp + \psi(p).$$

La *solución* (1″) *no se puede obtener a partir de la integral general* (4), cualquiera que sea el valor de $C$. Es una **solución singular** y se obtiene eliminando el parámetro $p$ de las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} y = xp + \psi(p), \\ x = \psi'(p) = 0, \end{array}\right\}$$

o, lo que es igual, eliminando $C$ de las ecuaciones

$$y = xC + \psi(C),$$

$$x + \psi'_C(C) = 0.$$

Por consiguiente, **la solución singular de la ecuación de Clairaut determina una envolvente de la familia de rectas, dadas por la integral general** (4).

**Ejemplo:** Hallar las integrales general y singular de la ecuación

$$y = x\frac{dy}{dx} + \frac{a\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

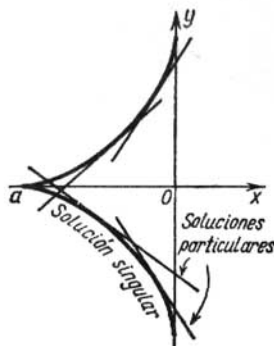



*Fig. 258*

**Solución.** Sustituyendo $\frac{dy}{dx}$ por $C$ obtenemos la integral general:

$$y = xC + \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}.$$

Para obtener la solución singular derivamos la última ecuación respecto a $C$:

$$x + \frac{a}{(1+C^2)^{3/2}} = 0.$$

La solución singular (ecuación de la envolvente) se obtiene en la forma paramétrica (donde $C$ es el parámetro):

$$\begin{cases} x = -\dfrac{a}{(1+C^2)^{3/2}}, \\ y = \dfrac{aC^3}{(1+C^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Eliminando el parámetro $C$ podemos obtener la dependencia directa entre $x$ e $y$. Elevando ambos miembros de cada ecuación a la potenica $\frac{2}{3}$, y sumando miembro a miembro las ecuaciones obtenidas, hallamos la solución singular en la forma siguiente:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Es una astroide. Sin embargo, como envolvente de la familia de rectas (y, por tanto, como solución singular) se presenta no toda la astroide, sino sólo su mitad izquierda (puesto que de las ecuaciones paramétricas de la envolvente se deduce que $x \leqslant 0$) (fig. 258).

## § 14. ECUACION DE LAGRANGE

La ecuación de la forma

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \tag{1}$$

*donde* $\varphi$ y $\psi$ *son* funciones conocidas de $\frac{dy}{dx}$, se llama *ecuación de Lagrange*. Esta ecuación es lineal respecto a $y$ y $x$. La ecuación de Clairaut, examinada en el párrafo anterior, es un caso particular de la ecuación de Lagrange, cuando $\varphi(y') \equiv y'$. Lo mismo que en *el caso de la ecuación de* Clairaut, la ecuación de Lagrange se integra introduciendo un parámetro auxiliar $p$.

Hagamos:

$$y' = p;$$

entonces, la ecuación original toma la forma:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \tag{1'}$$

Derivando respecto a $x$, obtenemos:

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx},$$

ó

$$p - \varphi(p) = [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}. \tag{1''}$$

De esta ecuación se puede deducir inmediatamente ciertas soluciones, a saber: la ecuación se transforma en una identidad para todo valor constante $p = p_0$, que satisfaga la condición:

$$p_0 - \varphi(p_0) = 0.$$

En efecto, siendo $p$ constante, la derivada $\frac{dp}{dx} \equiv 0$ y ambos miembros de la ecuación (1″) se anulan. La solución que corresponde a cada valor de $p = p_0$, es decir, $\frac{dy}{dx} = p_0$, es una función **lineal** de $x$ $\left(\text{puesto que la derivada } \frac{dy}{dx} \text{ es constante sólo para las funciones lineales}\right)$. Para hallar esta función es suficiente sustituir en la ecuación (1′) el valor $p = p_0$:

$$y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0).$$

Si esta solución no se deduce de la solución general, cualquiera que sea el valor de la constante arbitraria, será, por tanto, una **solución singular**.

Encontremos, ahora, la **solución general**. Para esto escribamos la ecuación (1″) en la forma:

$$\frac{dx}{dp} - x\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}$$

considerando $x$ como función de $p$. La ecuación obtenida es entonces una ecuación diferencial lineal respecto a la función $x$ de $p$.

Resolviéndola, encontramos:

$$x = \omega(p, C). \tag{2}$$

Eliminando el parámetro $p$ de las ecuaciones (1′) y (2), obtenemos la **integral general** de la ecuación (1) en la siguiente forma:

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

**Ejemplo.** Sea la ecuación

$$y = xy'^2 + y'^2. \tag{I}$$

Haciendo $y' = p$, tenemos:

$$y = xp^2 + p^2. \tag{I′}$$

Derivando respecto a $x$, obtenemos:

$$p = p^2 + [2xp + 2p]\frac{dp}{dx}. \tag{I″}$$

Hallemos las **soluciones singulares**. Puesto que $p = p^2$, cuando $p_0 = 0$ y $p_1 = 1$, en calidad de soluciones se presentan las funciones lineales [véase (I′)]:

$$y = x\cdot 0^2 + 0^2, \text{ es decir, } y = 0,$$

e

$$y = x + 1.$$

Después de encontrar la integral general, veamos, si estas funciones son las soluciones particulares o singulares. Para hallar la integral general escribamos la ecuación (I″) en la forma:

$$\frac{dx}{dp} - x\frac{2p}{p-p^2} = \frac{2}{1-p}$$

considerando $x$ como función de la variable independiente $p$. Integrando la ecuación lineal (respecto a $x$) hallamos.

$$x = -1 + \frac{C^2}{(p-1)^2}. \tag{II}$$

Eliminando $p$ de las ecuaciones (I′) y (II), obtenemos la **integral general:**

$$y = (C + \sqrt{x+1})^2.$$

La **integral singular** de la ecuación original será:

$$y = 0,$$

puesto que esta solución no se deduce de la solución general cualquiera que sea el valor de $C$.

Sin embargo, la función $y = x + 1$ no es una solución singular, sino particular, y se deduce de la solución general, poniendo $C = 0$.

## § 15. TRAYECTORIAS ORTOGONALES E ISOGONALES

Sea una familia de curvas monoparamétrica

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{1}$$

Las líneas que cortan todas las curvas de la familia dada (1) bajo un ángulo constante se llaman *trayectorias isogonales*. Si este ángulo es recto, las trayectorias se llaman *ortogonales*.

**Trayectorias ortogonales.** Hallemos la ecuación de las trayectorias ortogonales. Escribamos la ecuación diferencial de la familia dada de curvas, eliminando $C$ de las ecuaciones:

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

y

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Sea $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ (1′)

una ecuación diferencial.

Aquí, $\frac{dy}{dx}$ es un coeficiente angular de la tangente a una curva de la familia en el punto $M(x, y)$. Puesto que la trayectoria ortogonal, que pasa por el punto $M(x, y)$, es perpendicular a la curva correspondiente de la familia, entonces el coeficiente angular $\frac{dy_T}{dx}$ de la tangente a esta curva está ligado con $\frac{dy}{dx}$ por la correlación (fig. 259)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy_T}{dx}}. \tag{2}$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (1′) y omitiendo el índice $T$, obtenemos una relación entre las coordenadas de un punto arbitrario $(x, y)$ y el coeficiente angular de la trayectoria ortogonal en este punto, es decir, la **ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales:**

$$F\left(x, y, -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) = 0. \tag{3}$$

La integral general de esta ecuación

$$\Phi_1 (x, y, C) = 0$$

da la **familia de trayectorias ortogonales.**

Las trayectorias ortogonales se encuentran, por ejemplo, cuando estudiamos una corriente plana de un líquido.

Supongamos que la corriente de un líquido en un plano sea tal que en cada punto del plano $Oxy$ esté determinado el vector $\boldsymbol{v} (x, y)$ de la velocidad del movimiento. Si este vector depende

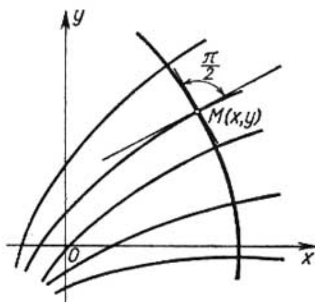


Fig. 259

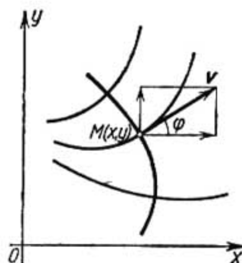


Fig. 260

sólo de la posición del punto en el plano y no depende del tiempo, entonces este movimiento se llama estacionario, o establecido. Examinemos, precisamente, un movimiento semejante. Admitamos, además, que existe un potencial de velocidades, es decir, una función $u (x, y)$ tal que las proyecciones del vector $\boldsymbol{v} (x, y)$ sobre los ejes de coordenadas $v_x (x, y)$ y $v_y (x, y)$, sean sus derivadas parciales respecto a $x$ e $y$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v_x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = v_y. \tag{4}$$

Las curvas de la familia

$$u (x, y) = C \tag{5}$$

se llaman *equipotenciales* (es decir, líneas de igual potencial).

Las curvas cuyas tangentes en cada punto coinciden en dirección con el vector $\boldsymbol{v} (x, y)$, se llaman *líneas de corriente* y representan las trayectorias de los puntos móviles.

Demostremos que las líneas de corriente son trayectorias ortogonales de la familia de líneas equipotenciales (fig. 260).

Sea $\varphi$ el ángulo formado por el vector de velocidad $\boldsymbol{v}$ con el eje $Ox$. En virtud de la correlación (4) tenemos:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = |\boldsymbol{v}| \cos\varphi; \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = |\boldsymbol{v}| \operatorname{sen}\varphi;$$

de aquí hallamos el coeficiente angular de la tangente a la línea de corriente

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y}}{\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x}}. \tag{6}$$

Derivando la relación (5) respecto a $x$, obtenemos el coeficiente angular de la tangente a la línea equipotencial:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

de donde:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}}. \tag{7}$$

Por consiguiente, el coeficiente angular de la tangente a la línea equipotencial es inverso, en magnitud y signo, al coeficiente angular de la tangente a la línea de corriente, de donde se deduce que las líneas equipotenciales y las de corriente son mutuamente ortogonales.

Si se trata de un campo eléctrico o magnético, las trayectorias ortogonales de la familia de líneas equipotenciales son las líneas de fuerza del campo correspondiente.

**Ejemplo 1.** Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de parábolas

$$y = Cx^2.$$

**Solución.** Escribamos la ecuación diferencial de la familia:

$$y' = 2Cx.$$

Eliminando $C$, obtenemos:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}.$$

Sustituyendo $y'$ por $-\frac{1}{y'}$, obtenemos la ecuación diferencial de la familia de trayectorias ortogonales:

$$-\frac{1}{yy'} = \frac{2}{x}$$

o sea

$$y\,dy = -\frac{x\,dx}{2}.$$

Su integral general es:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=C^2.$$

Por consiguiente, las trayectorias ortogonales de la familia dada de parábolas forma una familia de elipses con semiejes $a = 2C$, y $b = C\sqrt{2}$ (fig. 261).

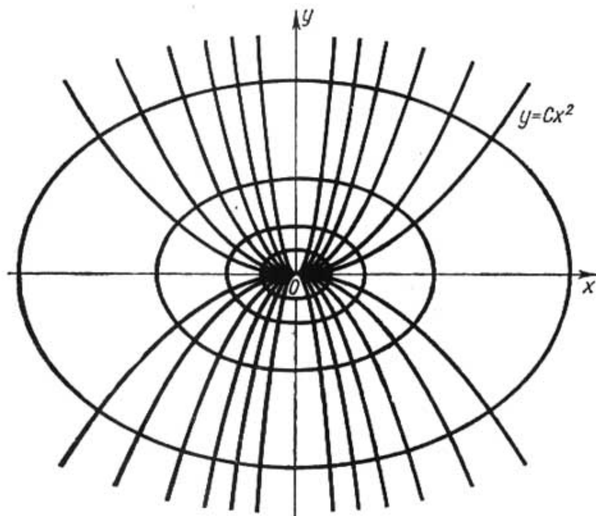



*Fig. 261*

**Trayectorias isogonales.** Supongamos que las trayectorias corten las curvas de una familia dada bajo el ángulo $\alpha$, siendo $\operatorname{tg}\alpha = k$. El coeficiente angular $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$ (fig. 262) de la tangente a la curva de la familia, y el coeficiente angular $\frac{dy_T}{dx} = \operatorname{tg}\psi$ de la tangente a la trayectoria isogonal están ligados mediante la correlación:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\psi-\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\psi},$$

es decir,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy_T}{dx}-k}{k\frac{dy_T}{dx}+1}. \qquad (2')$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (1') y quitando el índice $T$, obtenemos la ecuación diferencial de las trayectorias isogonales.

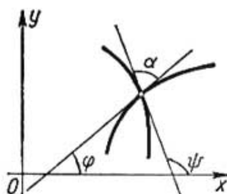



*Fig. 262*

**Ejemplo 2.** Hallar las trayectorias isogonales de la familia de rectas:

$$y = Cx, \qquad (8)$$

que cortan las líneas de la familia dada bajo el ángulo $\alpha$, siendo $\operatorname{tg}\alpha = k$.

**Solución.** Escribamos la ecuación diferencial de la familia de rectas. Derivando la ecuación (8) respecto a $x$, hallemos:

$$\frac{dy}{dx}=C.$$

Por otra parte, de la misma ecuación se deduce:

$$C=\frac{y}{x}.$$

Por consiguiente, la ecuación diferencial de la familia dada tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.$$

Utilizando la relación (2') obtenemos la ecuación diferencial de las trayectorias isogonales:

$$\frac{\frac{dy_T}{dx}-k}{k\frac{dy_T}{dx}+1}=\frac{y}{x}.$$

De donde, quitando el índice $T$, encontramos:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{k+\frac{y}{x}}{1-k\frac{y}{x}}.$$

**Integrando esta ecuación homogénea obtenemos la integral general:**

$$\ln \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln C, \tag{9}$$

**que determina la familia de las trayectorias isogonales. Para aclarar cuáles son las curvas de esta familia, pasemos a coordenadas polares:**

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi; \quad \sqrt{x^2+y^2} = \rho.$$

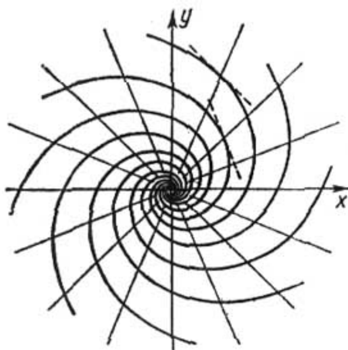



*Fig. 263*

Introduciendo estas expresiones en la igualdad (9), obtenemos:

$$\ln \rho = \frac{1}{k} \varphi + \ln C$$

ó

$$\rho = Ce^{\frac{\varphi}{k}}.$$

Por consiguiente, la familia de las trayectorias isogonales está compuesta por espirales logarítmicas (fig. 263).

## § 16. ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDENES SUPERIORES (GENERALIDADES)

Como hemos indicado más arriba (véase § 2), se puede escribir simbólicamente una ecuación diferencial de $n$-ésimo orden en la forma:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

o, si se puede resolverla respecto a la $n$-ésima derivada,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{1'}$$

En el capítulo presente estudiamos sólo las ecuaciones de órdenes superiores, que se resuelven respecto a la derivada del orden más alto. Para estas ecuaciones tiene lugar el teorema de existencia y unicidad de la solución, análogo al teorema correspondiente sobre la solución de las ecuaciones de primer orden.

**Teorema.** *Si en la ecuación*

$$y^{(n)} = f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$$

*la función* $f(x,\ y,\ y',\ \ldots\ y^{(n-1)})$ *y sus derivadas parciales respecto a los argumentos* $y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}$ *son continuas en un cierto dominio que contiene los valores* $x = x_0,\ y = y_0,\ y' = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, *existe solamente la solución única* $y = y(x)$ *de la ecuación que satisface las condiciones:*

$$\begin{aligned} y_{x=x_0} &= y_0, \\ y'_{x=x_0} &= y'_0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}_{x=x_0} &= y_0^{(n-1)}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Estas condiciones se llaman *iniciales*. En la presente obra no se demuestra este teorema.

Si analizamos una ecuación de segundo orden $y'' = f(x,\ y,\ y')$, las condiciones iniciales de la solución para $x = x_0$ serán:

$$y = y_0, \qquad y' = y'_0,$$

donde $x_0,\ y_0,\ y'_0$ son números dados. El significado geométrico de estas condiciones es el siguiente: por el punto dado de un plano $(x_0,\ y_0)$ pasa una sola curva cuya tangente del ángulo de inclinación de la línea tangente es $y'_0$. De aquí se deduce, además, que si damos diferentes valores a $y'_0$, conservando constantes $x_0$ e $y_0$, obtenemos una infinidad de curvas integrales con diferentes ángulos de inclinación que pasan por el punto dado.

Introduzcamos, ahora, la noción de solución general de una ecuación de $n$-ésimo orden.

**Definición.** Se llama *solución general* de una ecuación diferencial de $n$-ésimo orden una función

$$y = \varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n),$$

que depende de $n$ constantes arbitrarias $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ de tal modo que:

a) satisfaga la ecuación cualesquiera que sean los valores de las constantes $C_1,\ C_2,\ \ldots\ C_n$;

b) para las condiciones iniciales dadas:

$$y_{x=x_0}=y_0,$$
$$y'_{x=x_0}=y'_0,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$y^{(n-1)}_{x=x_0}=y^{(n-1)}_0$$

se puede elegir las constantes $C_1, C_2 \ldots, C_n$ así que la función $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ satisfaga estas condiciones (suponiendo que los valores iniciales $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ pertenezcan al dominio de existencia de la solución).

Una correlación de la forma $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, que define la solución general de manera implícita se llama *integral general* de la ecuación diferencial.

Toda función que se obtiene de la solución general para valores concretos de las constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, se llama *solución particular*. La gráfica de una solución particular se llama *curva integral* de la ecuación diferencial dada.

Resolver (integrar) una ecuación diferencial de $n$-ésimo orden significa:

1) hallar su solución general (si no se han dado las condiciones iniciales), o:

2) hallar tal solución particular de la ecuación que satisfaga las condiciones iniciales dadas (si éstas existen).

En los párrafos siguientes veremos los métodos de resolver distintas ecuaciones de $n$-ésimo orden.

## § 17. ECUACION DE LA FORMA $y^{(n)}=f(x)$

La ecuación de la forma

$$y^{(n)}=f(x), \tag{1}$$

es la más simple de $n$-ésimo orden.

Hallemos su integral general.

Integrando ambos miembros de la ecuación respecto a $x$, y tomando en consideración que $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, obtenemos:

$$y^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1,$$

donde $x_0$ es un valor arbitrario de $x$, y $C_1$ es una constante de integración.

Integrando una vez más tenemos:

$$y^{(n-2)}=\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x}f(x)\,dx\right)dx+C_1(x-x_0)+C_2.$$

Procediendo de esta manera, obtendremos por fin, después de $n$ integraciones, la expresión de la integral general:

$$y=\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x}f(x)\,dx\,\ldots\,dx+\frac{C_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+$$

$$+C_2\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots C_n.$$

Para hallar la solución particular que satisfaga las condiciones iniciales:

$$y_{x=x_0}=y_0;\quad y'_{x=x_0}=y'_0;\ \ldots;\ y^{(n-1)}_{x=x_0}=y_0^{(n-1)},$$

es suficiente hacer:

$$C_n=y_0,\ C_{n-1}=y'_0,\ \ldots,\ C_1=y_0^{n-1}.$$

**Ejemplo 1.** Hallar la integral general de la ecuación

$$y''=\operatorname{sen}(kx)$$

y la solución particular que satisfaga las condiciones iniciales:

$$y_{x=0}=0,\qquad y'_{x=0}=1.$$

**Solución:**

$$y'=\int_0^x\operatorname{sen}kx\,dx+C_1=-\frac{\cos kx-1}{k}+C_1,$$

$$y=-\int_0^x\left(\frac{\cos kx-1}{k}\right)dx+\int_0^x C_1dx+C_2$$

ó

$$y=-\frac{\operatorname{sen}kx}{k^2}+\frac{x}{k}+C_1x+C_2.$$

Esta es la integral general. Para hallar la solución particular que satisface las condiciones iniciales dadas es suficiente determinar los valores correspondientes de $C_1$ y $C_2$.

De la condición $y_{x=0}=0$ hallamos $C_2=0$.

De la condición $y'_{x=0}=1$ hallamos $C_1=1$.

Así, la solución particular buscada tiene la forma:

$$y=-\frac{\operatorname{sen}kx}{k^2}+x\left(\frac{1}{k}+1\right).$$

Ecuaciones diferenciales de este género se encuentran en la teoría de la flexión de vigas.

**Ejemplo 2.** Examinemos una viga prismática elástica sometida a la flexión por acción de fuerzas externas, tanto repartidas continuamente (peso, carga) como, concentradas. Dirijamos el eje $Ox$ horizontalmente, a lo largo del eje de la viga todavía no deformada y el eje $Oy$ verticalmente hacia abajo (fig. 264).

Toda fuerza aplicada a la viga (por ejemplo, la carga, reacción de los apoyos) tiene un momento respecto a cualquier sección transversal de la viga; este momento es igual al producto de la fuerza, por la distancia entre la sección dada y el punto de aplicación de la fuerza. La suma $M(x)$ de los momentos de todas las fuerzas aplicadas por un mismo lado de la sección de

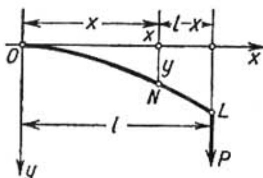



*Fig. 264*

abscisa $x$, se llama momento de flexión de la viga respecto a la sección dada. En el curso de «Resistencia de materiales» se demuestra que el momento de flexión de una viga es igual a: $\frac{EJ}{R}$, donde, $E$ es el módulo de elasticidad, que depende de material; $J$ es el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga respecto al eje horizontal que pasa por el centro de gravedad de esta sección; $R$ es el radio de curvatura del eje de la viga encorvada, que se expresa mediante la fórmula (§ 6, cap. VI):

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Así, la ecuación diferencial del eje de la viga encorvada tiene la forma:

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EJ}. \tag{2}$$

Si admitimos que las deformaciones son pequeñas y los ángulos entre las tangentes al eje de la viga encorvada y el eje $Ox$ son bastante pequeños, podemos despreciar la magnitud $y'^2$ que es el cuadrado de $y'$, y considerar:

$$R = \frac{1}{y''}.$$

La ecuación diferencial de la viga encorvada tomará entonces la forma:

$$y'' = \frac{M(x)}{EJ}, \tag{2'}$$

que es una ecuación de la forma (1).

**Ejemplo 3.** Una viga está encastrada por su extremo $O$ y sometida a la acción de una fuerza vertical concentrada $P$, aplicada al extremo libre $L$, a una distancia $l$ del punto de fijación (fig. 264). Despreciemos el peso de la viga.

Examinemos la sección en el punto $N(x)$. El momento de flexión respecto a la sección $N$ será

$$M(x)=(l-x)P.$$

La ecuación diferencial (2') tomará la forma:

$$y''=\frac{P}{EJ}(l-x).$$

Las condiciones iniciales son: cuando $x=0$, la flexión $y$ es igual a cero y la tangente al eje de la viga encorvada coincide con el eje $Ox$, es decir:

$$y_{x=0}=0, \qquad y'_{x=0}=0.$$

Integrando la ecuación encontramos:

$$y'=\frac{P}{EJ}\int_0^x (l-x)\,dx=\frac{P}{EJ}\left(lx-\frac{x^2}{2}\right);$$

$$y=\frac{P}{2EJ}\left(lx^2-\frac{x^3}{3}\right). \tag{3}$$

De la fórmula (3) se determina, en particular, la flexión $h$ en el extremo $L$ de la viga:

$$h=y_{x=l}=\frac{Pl^3}{3EJ}.$$

## § 18. ALGUNOS TIPOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN QUE SE REDUCEN A ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

**1. La ecuación de la forma**

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \tag{1}$$

**no contiene explícitamente la función desconocida $y$.**

**Solución.** Designemos por $p$ la derivada $\frac{dy}{dx}$, es decir, hagamos: $\frac{dy}{dx}=p$.

Entonces,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}.$$

Introduciendo estas expresiones de las derivadas en la ecuación (1) obtenemos una ecuación de primer orden

$$\frac{dp}{dx}=f(x, p)$$

donde $p$ es la función desconocida de $x$. Al integrar esta ecuación, encontramos su solución general:

$$p=p(x, C_1),$$

y, luego, de la correlación $\frac{dy}{dx}=p$ obtenemos la integral general de la ecuación (1):

$$y=\int p(x, C_1)\,dx+C_2.$$

**Ejemplo 1.** Examinemos la ecuación diferencial de una **catenaria** (véase § 1).

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Hagamos:

$$\frac{dy}{dx}=p.$$

Entonces,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx},$$

y obtenemos una ecuación diferencial de primer orden respecto a la función auxiliar $p$ de $x$:

$$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{a}\sqrt{1+p^2}.$$

Separando las variables, tenemos:

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{dx}{a},$$

de donde:

$$\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)=\frac{x}{a}+C_1,$$

$$p=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}+C_1}-e^{-\left(\frac{x}{a}+C_1\right)}\right).$$

Pero, como $p=\frac{dy}{dx}$ esta última correlación es una ecuación diferencial respecto a la función desconocida $y$. Integrándola, obtenemos la ecuación de la catenaria (véase § 1):

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}+C_1}+e^{-\left(\frac{x}{a}+C_1\right)}\right)+C_2.$$

Encontremos la solución particular que satisface las siguientes condiciones iniciales:

$$y_{x=0}=a,$$

$$y'_{x=0}=0.$$

La primera condición da $C_2=0$; la segunda, $C_1=0$.
En definitiva tenemos:

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

**Observación.** De modo análogo se puede integrar la ecuación

$$y^{(n)}=f(x,\ y^{(n-1)}).$$

Poniendo $y^{(n-1)}=p$, obtenemos una ecuación de primer orden para determinar $p$:

$$\frac{dp}{dx}=f(x,\ p).$$

Determinando $p$ en función de $x$, se deduce $y$ de la correlación $y^{(n-1)}=p$ (véase § 17).

**II. La ecuación de la forma**

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(y,\ \frac{dy}{dx}\right) \tag{2}$$

**no contiene explícitamente la variable independiente $x$.** Para resolverla hagamos de nuevo:

$$\frac{dy}{dx}=p, \tag{3}$$

pero, ahora **consideremos $p$ como función de $y$** (y no de $x$, como antes). Entonces:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p.$$

Poniendo en la ecuación (2) las expresiones $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$, obtenemos una ecuación de primer orden respecto a la función auxiliar $p$:

$$p\frac{dp}{dy}=f(y,\ p). \tag{4}$$

Integrándola, hallamos $p$ en función de $y$ y de una constante arbitraria $C_1$:

$$p=p(y,\ C_1).$$

Introduciendo este valor en la correlación (3), obtenemos una ecuación diferencial de primer orden para la función $y$ de $x$:

$$\frac{dy}{dx}=p(y,\ C_1).$$

Separando variables, tenemos:

$$\frac{dy}{p(y,\ C_1)}=dx.$$

Integrando esta ecuación, obtenemos la integral general de la ecuación original:

$$\Phi(x,\ y,\ C_1,\ C_2)=0.$$

**Ejemplo 2.** Hallar la integral general de la ecuación

$$3y''=y^{-\frac{5}{3}}.$$

**Solución.** Hagamos $p=\frac{dy}{dx}$ considerando $p$ como función de $y$. Entonces, $y''=p\frac{dp}{dy}$ y, por tanto, obtenemos una ecuación de primer orden para la función auxiliar $p$:

$$3p\frac{dp}{dy}=y^{-\frac{5}{3}}.$$

Integrando esta ecuación, hallamos:

$$p^2=C_1-y^{-\frac{2}{3}} \quad \text{ó} \quad p=\pm\sqrt{C_1-y^{-\frac{2}{3}}}.$$

Pero $p=\frac{dy}{dx}$; por consiguiente, para determinar $y$ obtenemos la ecuación:

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1-y^{-\frac{2}{3}}}}=dx \quad \text{ó} \quad \frac{y^{\frac{1}{3}}dy}{\pm\sqrt{C_1y^{\frac{2}{3}}-1}}=dx,$$

de donde:

$$x+C_2=\pm\int\frac{y^{\frac{1}{3}}dy}{\sqrt{C_1y^{\frac{2}{3}}-1}}.$$

Para calcular la última integral hagamos la sustitución:

$$C_1y^{2/3}-1=t^2.$$

Entonces:

$$y^{1/3}=(t^2+1)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{C_1^{1/2}};$$

$$dy=3t\,(t^2+1)^{1/2}\frac{1}{C_1^{3/2}}\,dt.$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{y^{1/3}dy}{\sqrt{C_1 y^{2/3}-1}}=\frac{1}{C_1^2}\int \frac{3t\,(t^2+1)}{t}\,dt=\frac{3}{C_1^2}\left(\frac{t^3}{3}+t\right)=$$

$$=\frac{1}{C_1^2}\sqrt{C_1 y^{2/3}-1}\,(C_1 y^{2/3}+2).$$

En la forma definitiva tenemos:

$$x+C_2=\pm\frac{1}{C_1^2}\sqrt{C_1 y^{2/3}-1}\,(C_1 y^{2/3}+2).$$

**Ejemplo 3.** Supongamos que un punto se mueve a lo largo del eje $Ox$ bajo la acción de una fuerza dependiente sólo de la posición del punto. La ecuación diferencial del movimiento será:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F\,(x).$$

Sea $x=x_0$, $\frac{dx}{dt}=v_0$ para $t=0$.

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación por $\frac{dx}{dt}\,dt$ e integrando entre los límites de 0 a $t$, obtenemos:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\int_{x_0}^{x}F\,(x)\,dx.$$

ó

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left[-\int_{x_0}^{x}F\,(x)\,dx\right]=\frac{1}{2}mv_0^2=\text{const.}$$

El primer término de la última ecuación representa la energía cinética y el segundo, la energía potencial del punto móvil. De la ecuación obtenida se deduce que la suma de las energías cinética y potencial permanece constante durante todo el tiempo de movimiento.

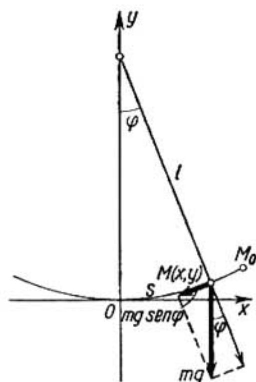


*Fig. 265*

**Problema de péndulo matemático.** Supongamos que un punto material de masa $m$ se mueve bajo la acción de la fuerza de gravedad por una circunferencia $L$ que se halla en un plano vertical. Hallemos la ecuación del movimiento del punto despreciando las fuerzas de resistencia (frotamiento, resistencia del aire, etc.).

Ubiquemos el origen de coordenadas en el punto inferior de la circunferencia, dirigiendo el eje $Ox$ a lo largo de la tangente a esta circunferencia (fig. 265).

Designemos por $l$ el radio de la circunferencia y por $s$, la longitud del arco a partir del origen $O$ hasta el punto variable $M$ donde se halla la masa $m$; al mismo tiempo tomemos la longitud mencionada con el signo correspondiente ($s>0$, si $M$ se encuentra a la derecha del origen $O$; $s<0$, si $M$ se encuentra a la izquierda del $O$).

El problema en consideración consiste en establecer la dependencia entre $s$ y el tiempo $t$.

Descompongamos la fuerza de gravedad mg en dos componentes: tangencial y normal. La primera, que es igual a $-mg$ sen $\varphi$, causa el movimiento, la segunda se elimina por la reacción de la curva descrita durante el movimiento de la masa $m$.

Así, la ecuación de movimiento tiene la forma:

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-mg\operatorname{sen}\varphi.$$

Puesto que para la circunferencia el ángulo $\varphi=\frac{s}{l}$; obtenemos la ecuación:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g\operatorname{sen}\frac{s}{l}.$$

Es una ecuación diferencial del tipo II (por no contener explícitamente la variable independiente $t$).

Integrándola de la manera correspondiente tenemos:

$$\frac{ds}{dt}=p,\qquad \frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dp}{ds}p.$$

Por consiguiente,

$$p\frac{dp}{ds}=-g\operatorname{sen}\frac{s}{l},$$

o bien,

$$p\,dp=-g\operatorname{sen}\frac{s}{l}\,ds,$$

de donde:

$$p^2=2gl\cos\frac{s}{l}+C_1.$$

Designemos mediante $s_0$ la longitud máxima del arco descrito por el punto $M$. Cuando $s=s_0$, la velocidad del punto es igual a cero:

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{s=s_0}=p\,|_{s=s_0}=0.$$

Esto permite determinar $C_1$:

$$0=2gl\cos\frac{s_0}{l}+C_1,$$

de donde

$$C_1=-2gl\cos\frac{s_0}{l}.$$

Por tanto,

$$p^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=2gl\left(\cos\frac{s}{l}-\cos\frac{s_0}{l}\right),$$

o, aplicando a la última expresión la fórmula que determina la diferencia de cosenos:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=4gl\operatorname{sen}\frac{s+s_0}{2l}\operatorname{sen}\frac{s_0-s}{2l},\tag{5}$$

o bien *):

$$\frac{ds}{dt}=2\sqrt{gl}\sqrt{\operatorname{sen}\frac{s+s_0}{2l}\operatorname{sen}\frac{s_0-s}{2l}}. \tag{6}$$

Esta es una ecuación con variables separables. Separándolas, obtenemos:

$$\frac{ds}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{s+s_0}{2l}\operatorname{sen}\frac{s_0-s}{2l}}}=2\sqrt{gl}\,dt. \tag{7}$$

Supongamos por ahora que $s\neq s_0$, entonces el denominador de la fracción es distinto de cero. Si suponemos que $s=0$ para $t=0$, de la igualdad (7) obtenemos:

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{s+s_0}{2l}\operatorname{sen}\frac{s_0-s}{2l}}}=2\sqrt{gl}\,t. \tag{8}$$

Esta igualdad expresa la dependencia entre $s$ y $t$. La integral del miembro izquierdo no se expresa mediante las funciones elementales; lo mismo ocurre con $s$ como función de $t$.

Examinemos del modo aproximado el problema planteado. Supongamos que los ángulos $\frac{s_0}{l}$ y $\frac{s}{l}$ son pequeños. Los ángulos $\frac{s+s_0}{2l}$ y $\frac{s_0-s}{2l}$ no son superiores a $\frac{s_0}{l}$. Sustituyamos en la ecuacion (6) los senos de ángulos por los ángulos:

$$\frac{ds}{dt}=2\sqrt{gl}\sqrt{\frac{s+s_0}{2l}\,\frac{s_0-s}{2l}},$$

o bien,

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{s_0^2-s^2}. \tag{6'}$$

Separando las variables, obtenemos (suponiendo provisionalmente que $s\neq s_0$):

$$\frac{ds}{\sqrt{s_0^2-s^2}}=\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt. \tag{7'}$$

Supongamos otra vez que $s=0$ para $t=0$. Integrando la última ecuacion, obtenemos:

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{s_0^2-s^2}}=\sqrt{\frac{g}{l}}\,t \tag{8'}$$

ó

$$\operatorname{arcsen}\frac{s}{s_0}=\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

*) Tomamos el signo más delante de la raíz. De la observación que se da al final del problema se deduce que no hay necesidad de examinar el caso cuando se toma el signo menos.

de donde:

$$s = s_0 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{g}{l}}\, t. \tag{9}$$

**Observación.** Al resolver el problema, hemos supuesto que $s \neq s_0$. Sin embargo, por medio de la sustitución directa nos convencemos de que la función (9) es solución de la ecuación (6′) para cualquier valor de $t$.

Recordemos que la solución (9) es aproximada para la ecuación (5), puesto que habíamos sustituido la ecuación (6) por la ecuación aproximada (6′).

La ecuación (9) muestra que el punto $M$, (que se puede considerar como el extremo del péndulo), efectúa oscilaciones armónicas de período $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Este período no depende de la amplitud de la oscilación $s_0$.

**Ejemplo 4.** Problema de la segunda velocidad cósmica (velocidad de escape).

Determinar la mínima velocidad con la cual se debe lanzar un cuerpo verticalmente hacia arriba para que éste no regrese a la tierra. La resistencia del aire se desprecia.

**Solución.** Designemos las masas de la Tierra y del cuerpo lanzado por $M$ y $m$, respectivamente. En virtud de la ley newtoniana de atracción, la fuerza $f$ que actúa en el cuerpo $m$, es:

$$f = k \frac{M \cdot m}{r^2},$$

donde, $r$ es la distancia entre el centro de la Tierra y el centro de gravedad del cuerpo lanzado;

$k$ es la constante de gravitación universal.

La ecuación diferencial de movimiento de este cuerpo de masa $m$ es:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{M \cdot m}{r^2}$$

ó

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{M}{r^2}. \tag{10}$$

Hemos tomado el signo menos puesto que la aceleración en el caso dado es negativa. La ecuación diferencial (10) es una ecuación de la forma (2). Resolvamos esta ecuación tomando las siguientes condiciones iniciales:

$$\text{cuando } t = 0,\ r = R \text{ y } \frac{dr}{dt} = v_0.$$

Aquí, $R$ es el radio de la Tierra, $v_0$ es la velocidad de lanzamiento. Introduzcamos las designaciones:

$$\frac{dr}{dt} = v, \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = v \frac{dv}{dr},$$

donde $v$ es la velocidad del movimiento. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (10), tenemos:

$$v \frac{dv}{dr} = -k \frac{M}{r^2}.$$

Separando las variables, resulta:

$$v\, dv = -kM \frac{dr}{r^2}.$$

Integrando esta ecuación, encontramos:

$$\frac{v^2}{2} = +kM\frac{1}{r} + C_1. \qquad (11)$$

Determinemos $C_1$ de la condición $v = v_0$, en la superficie de la Tierra $(r = R)$:

$$\frac{v_0^2}{2} = +kM\frac{1}{R} + C_1$$

ó

$$C_1 = -\frac{kM}{R} + \frac{v_0^2}{2}.$$

Sustituyendo el valor de $C_1$ en la igualdad (11):

$$\frac{v^2}{2} = +kM\,\frac{1}{r} - \frac{kM}{R} + \frac{v_0^2}{2}$$

ó

$$\frac{v^2}{2} = kM\frac{1}{r} + \left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R}\right). \qquad (12)$$

Según la hipótesis, la velocidad del cuerpo debe ser constantemente positiva, por tanto: $\frac{v^2}{2} > 0$. Como la magnitud $\frac{kM}{r}$ se hace muy pequeña cuando $r$ crece indefinidamente, la condición $\frac{v^2}{2} > 0$ se cumple para todo $r$ sólo en el caso de que:

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R} \geqslant 0 \qquad (13)$$

ó

$$v_0 \geqslant \sqrt{\frac{2kM}{R}}.$$

Por tanto, la velocidad mínima se define por la igualdad

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kM}{R}}, \qquad (14)$$

donde

$$k = 6{,}66 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{cm}^3}{\text{grseg}^2},$$

$$R = 63 \cdot 10^7 \text{ cm}.$$

En la superficie de la Tierra, cuando $r = R$, la aceleración de la fuerza de gravedad es igual a $g$ $\left(g = 981\,\frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}\right)$. En virtud de lo último, obtenemos de la igualdad (10):

$$g = k\,\frac{M}{R^2}$$

ó

$$M = \frac{gR^2}{k}.$$

Poniendo este valor de $M$ en la fórmula (14), tenemos:

$$v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2\cdot 981\cdot 63\cdot 10^7} \approx 11{,}2\cdot 10^5 \frac{\text{cm}}{\text{seg}} = 11{,}2 \frac{\text{km}}{\text{seg}}.$$

## § 19. METODO GRAFICO DE LA INTEGRACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

Aclaremos cuál es la interpretación geométrica de una ecuación diferencial de segundo orden. Sea la ecuación

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{1}$$

designemos por $\varphi$ el ángulo formado por la tangente a la curva con la dirección positiva del eje $Ox$; entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi. \tag{2}$$

Para aclarar el significado geométrico de la segunda derivada recordemos la fórmula que determina el radio de curvatura de una curva en un punto dado*):

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

De donde tenemos:

$$y'' = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{R}.$$

Pero,

$$y' = \operatorname{tg}\varphi;\ 1+y'^2 = 1+\operatorname{tg}^2\varphi = \sec^2\varphi;\ (1+y'^2)^{3/2} =$$
$$= |\sec^3\varphi| = \frac{1}{|\cos^3\varphi|}.$$

Por eso:

$$y'' = \frac{1}{R\,|\cos^3\varphi|}. \tag{3}$$

---

*) Hasta ahora siempre hemos considerado que el radio de curvatura es un número positivo. Pero, en este párrafo supongamos que el radio de curvatura pueda tomar valores tanto positivos como negativos: si la curva es convexa ($y'' < 0$), consideremos el radio de curvatura negativo ($R < 0$); si la curva es cóncava ($y'' > 0$), considerémoslo como positivo ($R > 0$).

Introduciendo, ahora, las expresiones obtenidas para $y$ e $y''$ en la ecuación (1), obtenemos:

$$\frac{1}{R\left|\cos^3\varphi\right|}=f(x,\ y,\ \operatorname{tg}\varphi),$$

ó

$$R=\frac{1}{\left|\cos^3\varphi\right|\cdot f(x,\ y,\ \operatorname{tg}\varphi)}. \tag{4}$$

Esto demuestra que la ecuación diferencial de segundo orden determina la magnitud del radio de curvatura de la curva integral,

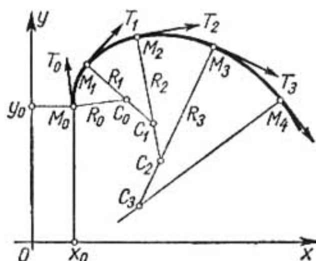



*Fig. 266*

si están dadas las coordenadas del punto y la dirección de la tangente en este punto.

De lo anterior se deduce el método de la construcción aproximada de una curva integral con ayuda de una curva lisa*); la curva está constituida por arcos de circunferencias.

Supongamos, por ejemplo, que es preciso hallar una solución de la ecuación (1), que satisfaga las siguientes condiciones iniciales:

$$y_{x=x_0}=y_0; \qquad y'_{x=x_0}=y'_0.$$

Tracemos por el punto $M_0\,(x_0,\ y_0)$ un rayo $M_0T_0$, cuyo coeficiente angular es $y'=\operatorname{tg}\varphi_0=y'_0$ (fig. 266). De la ecuación (4) encontramos la magnitud $R=R_0$. Pongamos un segmento $M_0C_0$ igual a $R_0$ en la perpendicular a la dirección $M_0T_0$ y tracemos (tomando el punto $C_0$ por centro) un arco pequeño $\overset{\frown}{M_0M_1}$ de radio $R_0$. Notemos que es preciso orientar el segmento $M_0C_0$ en la direc-

*) Es una curva que tiene en todos los puntos la tangente, cuyo ángulo de inclinación es una función continua de la longitud $s$ del arco.

ción conveniente para que el arco de la circunferencia sea convexo hacia arriba cuando $R_0 < 0$; y sea convexo abajo cuando $R_0 > 0$ (véase la nota en la página 67).

Sean $x_1$ e $y_1$ las coordenadas del punto $M_1$ en el arco construido y ubicado suficientemente próximo al punto $M_0$, y sea $\operatorname{tg} \varphi_1$, el coeficiente angular de la tangente $M_1T_1$ a la circunferencia trazada en el punto $M_1$. De la ecuación (4) hallamos el valor de $R = R_1$ correspondiente al punto $M_1$. Tracemos el segmento $M_1C_1$, igual a $R_1$ y perpendicular a $M_1T_1$; tomando el punto $C_1$ como centro, tracemos arco $\widehat{M_1M_2}$ de radio $R_1$. Tomemos luego en este arco un punto $M_2$ $(x_2, y_2)$, próximo a $M_1$, y continuemos nuestra construcción hasta obtener un tramo suficientemente grande de la curva, formado por los arcos de circunferencias. De lo anteriormente dicho se deduce que esta curva es aproximadamente una línea integral que pasa por el punto $M_0$. Es evidente que la curva construida tanto más se aproximará a la curva integral cuanto menores serán los arcos $\widehat{M_0M_1}$, $\widehat{M_1M_2}$, . . .

## § 20. ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS. DEFINICIONES Y PROPIEDADES GENERALES

**Definición 1.** Una ecuación diferencial de $n$-ésimo orden se llama *lineal* si es de primer orden respecto a la función desconocida $y$ y sus derivadas $y'$, . . ., $y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$, es decir, si esta ecuación tiene la forma

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = f(x), \tag{1}$$

donde $a_0$, $a_1$, $a_2$, . . ., $a_n$ y $f(x)$ son funciones dadas de $x$ o constantes; además, $a_0 \neq 0$ para todos los valores de $x$, en el dominio de definición de la ecuación (1). En adelante supongamos que las funciones $a_0$, $a_1$, . . ., $a_n$ y $f(x)$ son continuas para todos los valores de $x$ y que el coeficiente $a_0 = 1$ (si $a_0$ es distinto de la unidad, es suficiente dividir por él todos los términos de la ecuación). La función $f(x)$, se llama *segundo miembro de la ecuación.*

Si $f(x) \not\equiv 0$, la ecuación se llama lineal *no homogénea*, o ecuación *con segundo miembro*. Si $f(x) \equiv 0$, la ecuación tiene la forma:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0 \tag{2}$$

y se llama lineal *homogénea*, o ecuación *sin segundo miembro* (el primer miembro de esta ecuación es una función homogénea de primer orden respecto a $y$, $y'$, $y''$, . . ., $y^{(n)}$).

Definamos algunas propiedades fundamentales de las ecuaciones lineales homogéneas, limitándonos a las demostraciones de las ecuaciones de segundo orden.

**Teorema 1.** *Si $y_1$ e $y_2$ son dos soluciones particulares de la ecuación lineal homogénea de segundo orden*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{3}$$

*entonces, $y_1 + y_2$ es también la solución de esta ecuación.*

**Demostración.** Si $y_1$ e $y_2$ son las soluciones de la ecuación, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0 \\ y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Poniendo en la ecuación (3) la suma $y_1 + y_2$ y tomando en consideración las identidades (4), tenemos:

$$(y_1 + y_2)'' + a_1 (y_1 + y_2)' + a_2 (y_1 + y_2) =$$
$$= (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = 0 + 0 = 0,$$

es decir, $y_1 + y_2$ es solución de la ecuación.

**Teorema 2.** *Si $y_1$ es una solución de la ecuación (3), y $C$ es una constante, el producto $Cy_1$ es, también, una solución de esta ecuación (3).*

**Demostración.** Introduciendo en la ecuación (3) la expresión $Cy_1$, obtenemos:

$$(Cy_1)'' + a_1 (Cy_1)' + a_2 (Cy_1) = C (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) = C \cdot 0 = 0;$$

y el teorema queda demostrado.

**Definición 2.** Dos soluciones $y_1$ e $y_2$ de la ecuación (3) se llaman *linealmente independientes en el segmento* $[a, b]$, si su razón en éste último no es constante, es decir, cuando

$$\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const.}$$

En caso contrario, las soluciones se llaman *linealmente dependientes.* En otras palabras, dos soluciones $y_1$ e $y_2$ se llaman *linealmente dependientes* en el segmento $[a, b]$, si existe un número constante $\lambda$ tal que $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$, cuando $a \leqslant x \leqslant b$. En este caso $y_1 = \lambda y_2$.

**Ejemplo 1.** Sea la ecuación $y'' - y = 0$, es fácil verificar que las funciones $e^x$, $e^{-x}$, $3e^x$, $5e^{-x}$ son soluciones de esta ecuación. Las funciones $e^x$ y $e^{-x}$ son linealmente independientes en todo segmento, puesto que la razon $\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$ no permanece constante cuando varía $x$. En cambio, las funciones $e^x$ y $3e^x$ son linealmente dependientes, puesto que $\frac{3e^x}{e^x} = 3 = \text{const.}$

**Definición 3.** Si $y_1$ e $y_2$ son las funciones de $x$, entonces el determinante

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

se llama *determinante de Wronski* o, simplemente, *Wronskiano* de las funciones dadas.

**Teorema 3.** *Si las funciones $y_1$ e $y_2$ son linealmente dependientes en el segmento $[a, b]$, el Wronskiano en este segmento es idénticamente igual a cero.*

En efecto, si $y_2 = \lambda y_1$, donde $\lambda = \text{const}$, entonces $y_2' = \lambda y_1'$, y

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0.$$

**Teorema 4.** *Si el Wronskiano $W(y_1, y_2)$, de las soluciones $y_1$ e $y_2$ de la ecuación lineal homogénea (3) no se anula en un punto $x = x_0$ del segmento $[a, b]$, donde los coeficientes de la ecuación son continuos, entonces no se anula para cualquier valor de $x$ en este segmento.*

**Demostración.** Puesto que $y_1$ e $y_2$ son dos soluciones de la ecuación (3), tenemos:

$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0, \qquad y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0.$$

Multiplicando los términos de la primera igualdad, por $y_1$ y los términos de la segunda por $y_2$ y luego sumándolas, obtenemos:

$$(y_1 y_2'' - y_1'' y_2) + a_1 (y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0. \tag{5}$$

La diferencia encerrada entre segundo paréntesis es el Wronskiano $W(y_1 \ y_2)$:

$$W(y_1 y_2) = (y_1 y_2' - y_1' y_2).$$

La diferencia encerrada entre el primer paréntesis es la derivada del determinante de Wronski

$$W(y_1 y_2)_x' = (y_1 y_2' - y_1' y_2) = y_1 y_2'' - y_1'' y_2.$$

Por consiguiente, la igualdad (5) asume la forma:

$$W' + a_1 W = 0 \tag{6}$$

Hallemos la solución de la última ecuación que satisfaga la condición inicial:

$$W \big|_{x=x_0} = W_0.$$

Hallemos al principio la solución general de la ecuación (6), suponiendo que $W \neq 0$.

Separando variables, en la ecuación (6), tenemos:

$$\frac{dW}{W} = -a_1\,dx.$$

Integrando, hallamos:

$$\ln W = -\int_{x_0}^{x} a_1\,dx + \ln C$$

ó

$$\ln \frac{W}{C} = -\int_{x_0}^{x} a_1\,dx,$$

de donde:

$$W = Ce^{-\int_{x_0}^{x} a_1\,dx}. \qquad (7)$$

Notemos que se podría escribir la función (7), de modo que esta función satisfaga la ecuación (6). Es fácil cerciorarse de esto mediante sustitución directa de esta función en la ecuación (6). La suposición $W \neq 0$ no es necesaria.

La fórmula (7) se llama *fórmula de Litsville.*

Determinemos $C$ de modo que se satisfaga la condición inicial. Poniendo $x = x_0$ en el primer y segundo miembros de la ecuación (7), obtenemos:

$$W_0 = C.$$

Por tanto, la solución que satisfaga las condiciones iniciales toma la forma:

$$W = W_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a_1\,dx} \qquad (7')$$

Según la hipótesis, $W_0 \neq 0$. Pues, de la ecuación (7') se deduce que $W \neq 0$, cualquiera que sea el valor de $x$, puesto que la función exponencial no se reduce a cero para todos los valores finitos de la variable. El teorema queda demostrado.

**Observacion 1.** Si el Wronskiano es nulo para cierto valor de $x = x_0$, este determinante también es igual a cero para cualquier valor de $x$ en el segmento considerado.

Esto se deduce directamente de la fórmula (7): si $W = 0$ para $x = x_0$, entonces:

$$(W)_{x=x_0} = C = 0;$$

por consiguiente, $W \equiv 0$, cualquiera que sea el valor del límite superior de $x$ en la fórmula (7).

**Teorema 5.** *Si las soluciones $y_1$ e $y_2$ de la ecuación (3) son linealmente independientes en el segmento $[a, b]$, el Wronskiano $W$ formado para estas soluciones no se reduce a cero en ningún punto del segmento indicado.*

Indiquemos sólo la idea de demostración de este teorema, sin darla en forma completa.

Supongamos que $W = 0$ en cierto punto del segmento entonces, en virtud del teorema 3, el Wronskiano será nulo en todos los puntos del segmento $[a, b]$:

$$W = 0$$

ó

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = 0.$$

Examinemos al principio los intervalos dentro del segmento $[a, b]$ donde $y_1 \neq 0$. Entonces,

$$\frac{y_1y_2' - y_1'y_2}{y_1^2} = 0$$

ó

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0.$$

Por tanto, la razón $\frac{y_2}{y_1}$ es constante en cada uno de los intervalos mencionados:

$$\frac{y_2}{y_1} = \lambda = \text{const}.$$

Utilizando el teorema de existencia y unicidad, se puede mostrar que $y_2 = \lambda y_1$ para todos los puntos del segmento $[a, b]$, incluyendo los puntos donde $y_1 = 0$, lo que es imposible, puesto que, según la hipótesis $y_2$ e $y_1$ son linealmente independientes. Por consiguiente, el Wronskiano no se anula en ningún punto del segmento $[a, b]$.

**Teorema 6.** *Si $y_1$ e $y_2$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (3), entonces*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2, \tag{8}$$

*donde $C_1$ y $C_2$ son las constantes arbitrarias. Esta es la solución general de la ecuación (3).*

**Demostración.** De los teoremas 1 y 2 se deduce que la función

$$C_1y_1 + C_2y_2$$

es la solución de la ecuación (3) cualesquiera que sean las constantes $C_1$ y $C_2$.

Demostremos, ahora, que cualesquiera que sean las condiciones iniciales $y_{x=x_0} = y_0$, $y'_{x=x_0} = y'_0$, es posible elegir los valores de las constantes arbitrarias $C_1$ y $C_2$ de modo tal que la solución particular correspondiente $C_1y_1 + C_2y_2$ satisfaga las condiciones iniciales dadas.

Poniendo las condiciones iniciales en la igualdad (8), tenemos:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= C_1y_{10} + C_2y_{20}, \\ y'_0 &= C_1y'_{10} + C_2y'_{20}, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

donde se pone:

$$(y_1)_{x=x_0} = y_{10};\ (y_2)_{x=x_0} = y_{20};\ (y'_1)_{x=x_0} = y'_{10};\ (y'_2)_{x=x_0} = y'_{20}.$$

Del sistema (9) se puede definir $C_1$ y $C_2$, puesto que el determinante de este sistema

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} = y_{10}y'_{20} - y'_{10}y_{20}$$

es el Wronskiano cuando $x = x_0$, y, por tanto, no es igual a cero (en virtud de la independencia lineal de las soluciones $y_1$ e $y_2$). La solución particular que se deduce de la familia (8), para los valores hallados de $C_1$ y $C_2$, satisface las condiciones iniciales dadas. De este modo el teorema queda demostrado.

**Ejemplo 2.** La ecuación

$$y'' + \frac{1}{x}\, y' - \frac{1}{x^2}\, y = 0,$$

cuyos coeficientes $a_1 = \frac{1}{x}$ y $a_2 = -\frac{1}{x^2}$ son continuos en todo el segmento, que no contiene el punto $x = 0$, admite las soluciones particulares:

$$y_1 = x, \quad y_2 = \frac{1}{x}$$

(lo que se verifica fácilmente, sustituyéndolas en la ecuación). Por tanto, su solución general tiene la forma:

$$y = C_1x + C_2\frac{1}{x}\ .$$

**Observación 2.** No existen métodos generales que permitan hallar en forma finita la solución general de una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables. Sin embargo, para las ecuaciones con coeficientes constantes tal método existe y será expuesto en el párrafo siguiente. En cuanto a las ecuaciones con coeficientes variables, en el capítulo XVI «Series» indicaremos algunos procedimientos para encontrar las soluciones aproximadas que satisfagan las condiciones iniciales.

Por ahora demostremos un teorema que permite hallar la solución general de una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes variables, si se conoce una de sus soluciones particulares. Este teorema puede ser útil en muchos casos, siempre y cuando se logre encontrar directamente o adivinar, por cualquier método, una solución particular.

**Teopema 7.** *Si se conoce una solución particular de una ecuación lineal homogénea de segundo orden, la búsqueda de la solución general se reduce a la integración de funciones.*

**Demostración.** Sea $y_1$ una solución particular conocida de la ecuación

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0.$$

Hallemos otra solución particular de la ecuación dada de modo que $y_1$ e $y_2$ sean linealmente independientes. Entonces, la solución general se expresará mediante la fórmula $y = C_1y_1 + C_2y_2$, donde $C_1$ y $C_2$ son constantes arbitrarias. En virtud de la fórmula (7) (véase la demostración del teorema 4) sa puede escribir:

$$y_2'y_1 - y_2y_1' = Ce^{-\int a_1\,dx}$$

Así, para determinar $y_2$ tenemos una ecuación lineal de primer orden. Integrémosla de la manera siguiente. Dividamos todos los términos por $y_1^2$:

$$\frac{y_2'y_1 - y_2y_1'}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2}Ce^{-\int a_1\,dx}$$

ó

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1^2}Ce^{-\int a_1\,dx};$$

de donde:

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{Ce^{-\int a_1\,dx}}{y_1^2}\,dx + C_2.$$

Puesto que buscamos una solución particular, poniendo $C_2 = 0$, $C = 1$, obtenemos:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1\,dx}}{y_1^2}\,dx. \tag{10}$$

Es evidente, que $y_1$ e $y_2$ son soluciones linealmente independientes, puesto que $\frac{y_2}{y_1} \neq$ const.

De tal modo, la solución general de la ecuación original tiene la forma:

$$y = C_1y_1 + C_2y_1 \int \frac{e^{-\int a_1\,dx}}{y_1^2}\,dx. \tag{11}$$

**Ejemplo 3.** Hallar la solución general de la ecuación:

$$(1 - x^2)\,y'' - 2\,xy' + 2y = 0.$$

**Solución.** *Directamente se verifica que esta ecuación tiene una solución particular* $y_1 = x$. Hallemos la segunda solución particular $y_2$ tal que $y_1$ e $y_2$ sean linealmente independientes.

Notemos que en nuestro caso $a_1 = \frac{-2x}{1-x^2}$, en virtud de la fórmula (10) obtenemos:

$$y = x \int \frac{e^{\int \frac{2x\,dx}{1-x^2}}}{x^2}\,dx = x \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2}\,dx = x \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} =$$

$$= x \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\right) dx = x\left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right].$$

Por tanto, la solución general tiene la forma:

$$y = C_1x + C_2\left(\frac{1}{2}\,x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 1\right).$$

## § 21. ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

Sea la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{1}$$

donde, $p$ y $q$ son números constantes reales. Según hemos demostrado, para hallar la integral general de esta ecuación es suficiente encontrar dos soluciones particulares linealmente independientes.

Busquemos las soluciones particulares en la forma

$$y = e^{kx}, \qquad \text{donde } k = \text{const}; \tag{2}$$

entonces,

$$y' = ke^{kx}; \qquad y'' = k^2e^{kx}.$$

Introduciendo las expresiones obtenidas de las derivadas en la ecuación (1), hallamos:

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Como $e^{kx} \neq 0$, resulta que

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{3}$$

Por consiguiente, si $k$ satisface a la ecuación (3), $e^{kx}$ será solución de la ecuación (1). La (3) se llama *ecuación característica* respecto a la ecuación (1).

La ecuación característica es una ecuación de segundo orden que tiene dos raíces, las cuales designamos por $k_1$ y $k_2$. Entonces

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Son posibles los casos siguientes:

I. $k_1$ y $k_2$ son números reales y distintos ($k_1 \neq k_2$);

II. $k_1$ y $k_2$ son números complejos;

III. $k_1$ y $k_2$ son números reales iguales ($k_1 = k_2$).

Examinemos cada caso por separado:

1. **Las raíces de la ecuación característica son reales y distintas:** $k_1 \neq k_2$. En este caso las soluciones particulares serán las funciones

$$y_1 = e^{k_1 x}; \qquad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Estas soluciones son linealmente independientes, puesto que

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \text{const.}$$

Por tanto, la integral general tiene la forma

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

**Ejemplo 1.** Sea la ecuación

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

La ecuación característica tiene la forma:

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Hallemos las raíces de la ecuación característica:

$$k_{1,\,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}\,; \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -2.$$

La integral general es

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}.$$

II. **Las raíces de la ecuación característica son complejas.** Puesto que las raíces complejas son conjugadas en pares, introduzcamos las designaciones:

$$k_1 = \alpha + i\beta; \quad k_2 = \alpha - i\beta,$$

donde:

$$\alpha = -\frac{p}{2}\,; \qquad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\,.$$

Las soluciones particulares se pueden escribir en la forma:

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}; \qquad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} \tag{4}$$

Estas son funciones complejas de un argumento real que satisfacen la ecuación diferencial (1) (véase § 4, cap. VII).

Es evidente, que si alguna función compleja del argumento real

$$y = u(x) + iv(x) \tag{5}$$

satisface la ecuación (1), a esta ecuación satisfacen también las funciones $u(x)$ y $v(x)$.

En efecto, introduciendo la expresión (5) en la ecuación (1) tenemos:

$$[u(x) + iv(x)]'' + p[u(x) + iv(x)]' + q[u(x) + iv(x)] \equiv 0$$

ó

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) \equiv 0.$$

Pero una función compleja es nula solamente en el caso en que las partes real e imaginaria son iguales a cero, es decir,

$$u'' + pu' + qu = 0,$$

$$v'' + pv' + qv = 0.$$

Hemos demostrado que $u(x)$ y $v(x)$ son soluciones de la ecuación dada.

Escribamos las soluciones complejas (4) en la forma de una suma de las partes real e imaginaria:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x,$$

$$y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x.$$

Según lo demostrado las funciones reales siguientes serán las soluciones particulares de la ecuación (1):

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \tag{6'}$$

$$\tilde{y}_2 = e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x. \tag{6''}$$

Las funciones $\tilde{y}_1$ e $\tilde{y}_2$ son linealmente independientes, puesto que:

$$\frac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_2} = \frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x} = \mathrm{cotg}\,\beta x \neq \mathrm{const.}$$

Por tanto, la solución general de la ecuación (1) en el caso en que las raíces de la ecuación característica son complejas, toma la forma:

$$y = A\tilde{y}_1 + B\tilde{y}_2 = Ae^{\alpha x}\cos\beta x + Be^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x$$

ó

$$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\,\mathrm{sen}\,\beta x). \tag{7}$$

donde $A$ y $B$ son las constantes arbitrarias.

**Ejemplo 2.** Sea la ecuación

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Hallar la integral general y la solución particular que satisface las condiciones iniciales: $y_{x=0} = 0$, $y'_{x=0} = 1$.

Construir la gráfica.

**Solución:** 1) Escribamos la ecuación característica:

$$k^2 + 2k + 5 = 0,$$

y encontremos sus raíces:

$$k_1 = -1 + 2i, \; k_2 = -1 - 2i.$$

Por tanto, la integral general es:

$$y = e^{-x} (A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x).$$

2) Hallemos la solución particular que satisface las condiciones iniciales dadas y determinemos los valores correspondientes de $A$ y $B$. De la

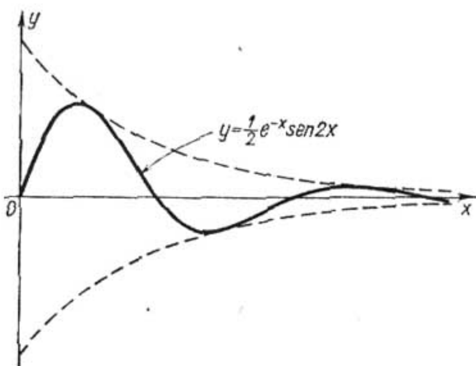



*Fig. 267*

primera condición se deduce:

$$0 = e^{-0} (A \cos 2\cdot 0 + B \operatorname{sen} 2\cdot 0), \text{ de donde: } A = 0.$$

Notemos que $y' = e^{-x} 2B \cos 2x - e^{-x} B \operatorname{sen} 2x$. De la segunda condición se deduce: $1 = 2B$,

es decir, $B = \frac{1}{2}$.

Pues, la solución particular buscada es:

$$y = \frac{1}{2} e^{-x} \operatorname{sen} 2x.$$

La gráfica de la solución se muestra en la figura 267.

**III. Las raíces de la ecuación característica son reales e iguales,** es decir, $k_1 = k_2$. Una de las soluciones particulares, a saber, $y_1 = e^{k_1 x}$, se obtiene en virtud de los razonamientos precedentes. Es preciso encontrar la segunda solución particular, linealmente

*independiente de la primera* (la función $e^{k_2x}$ es idénticamente igual a $e^{k_1x}$, por lo que no puede considerarse como segunda solución particular).

Busquemos la segunda solución particular en la forma:

$$y_2 = u(x)\,e^{k_1x},$$

donde $u(x)$ es una función desconocida a determinar.

Derivando, encontramos:

$$y_2' = u'e^{k_1x} + k_1ue^{k_1x} = e^{k_1x}(u' + k_1u),$$

$$y_2'' = u''e^{k_1x} + 2k_1u'e^{k_1x} + k_1^2ue^{k_1x} = e^{k_1x}(u'' + 2k_1u' + k_1^2u).$$

Sustituyendo las expresiones de las derivadas en la ecuación (1), obtenemos:

$$e^{k_1x}[u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + pk_1 + q)u] = 0.$$

Como $k_1$ es una raíz múltiple de la ecuación característica, tenemos:

$$k_1^2 + pk_1 + q = 0$$

Además, $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ ó $2k_1 = -p$, $2k_1 + p = 0$.

Por tanto, para hallar $u(x)$, hace falta resolver la ecuación $e^{k_1x}u'' = 0$ ó $u'' = 0$. Integrando, obtenemos: $u = Ax + B$. En particular, se puede poner $A = 1$, $B = 0$; entonces, $u = x$. Así, en calidad de segunda solución particular se puede tomar:

$$y_2 = xe^{k_1x}.$$

Esta ecuación es linealmente independiente de la primera, puesto que $\frac{y_2}{y_1} = x \neq$ const.

Por tanto, como integral general se puede tomar la función:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x} = e^{k_1x}(C_1 + C_2x).$$

**Ejemplo 3.** Sea la ecuación

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

La ecuación característica es $k^2 - 4k + 4 = 0$. Encontremos sus raíces $k_1 = k_2 = 2$. La integral general es:

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}.$$

## § 22. ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS DE $N$ — ESIMO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

*Examinemos una ecuación lineal homogénea de $n$-ésimo orden:*

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0. \qquad (1)$$

Supongamos que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son las constantes. Antes de indicar un método de resolver la ecuación (1) introduzcamos una definición que será útil más adelante.

**Definición 1.** Si para todos los $x$ del segmento $[a, b]$ se verifica la igualdad

$$\varphi_n(x) = A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + \ldots + A_{n-1}\varphi_{n-1}(x),$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son constantes, de las cuales por lo menos una no es igual a cero, suele decirse que $\varphi_n(x)$ *es una combinación lineal de las funciones* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$.

**Definición 2.** $n$ funciones $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x), \varphi_n(x)$ *se llaman linealmente independientes*, si ninguna de ellas puede ser representada como combinación lineal de las otras.

**Observación 1.** De estas definiciones se deduce que si las funciones $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ son linealmente dependientes, entonces existen las constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de las cuales por lo menos una no es igual a cero. Estas constantes son tales que para todos los $x$ del segmento $[a, b]$ se cumple la identidad:

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x) \equiv 0.$$

**Ejemplos:**

1. Las funciones $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = 3e^x$ son linealmente dependientes, puesto que para $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = -\frac{1}{3}$ se verifica la identidad:

$$C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3 3e^x \equiv 0.$$

2. Las funciones $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$ son linealmente independientes, puesto que no se puede anular la expresión

$$C_1 \cdot 1 + C_2x + C_3x^2$$

cualesquiera que sean $C_1, C_2, C_3$, siempre cuando no son simultáneamente iguales a cero.

3. Las funciones

$$y_1 = e^{k_1x}, \; y_2 = e^{k_2x}, \; \ldots, \; y_n = e^{k_nx}, \; \ldots, \text{ donde } k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$$

son números arbitrarios y linealmente independientes. (Demos esta afirmación sin demostración).

Pasemos, ahora, a la solución de la ecuación (1). Para esta ecuación es válido el teorema siguiente.

**Teorema.** *Si las funciones* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *son soluciones linealmente independientes de la ecuación (1), su solución general es*:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n, \tag{2}$$

donde $C_1, \ldots, C_n$ son *constantes arbitrarias*.

Si los coeficientes de la ecuación (1) son constantes, la solución general se halla del mismo modo como en el caso de la ecuación de segundo orden.

1) Formemos la ecuación característica:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

2) Hallemos las raíces de la ecuación característica:

$$k_1, k_2, \ldots, k_n.$$

3) Según el carácter de las raíces, escribamos las soluciones particulares, linealmente independientes, partiendo de lo siguiente:

a) a toda raíz real simple $k$ corresponde una solución particular $e^{kx}$;

b) a todo par de raíces complejas conjugadas $k^{(1)} = \alpha + i\beta$ y $k^{(2)} = \alpha - i\beta$, corresponden dos soluciones particulares: $e^{\alpha x} \cos \beta x$ y $e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$;

c) a toda raíz real $k$ de multiplicidad $r$ corresponden $r$ soluciones particulares linealmente independientes:

$$e^{kx},\ xe^{kx},\ \ldots,\ x^{r-1}e^{kx};$$

d) a todo par de raíces complejas conjugadas de multiplicidad $\mu$ : $k^{(1)} = \alpha + i\beta$, $k^{(2)} = \alpha - i\beta$, corresponden $2\mu$ soluciones particulares:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x,\ xe^{\alpha x} \cos \beta x,\ \ldots,\ x^{\mu-1}e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x,\ xe^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x,\ \ldots,\ x^{\mu-1}e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.$$

El número de estas soluciones particulares es igual al grado de la ecuación característica (es decir, al orden de la ecuación diferencial dada). Se puede demostrar *que estas soluciones son linealmente independientes*.

4) Al encontrar $n$ soluciones particulares linealmente independientes $y_1, y_2, \ldots, y_n$, formemos la solución general de la ecuación lineal dada:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son las constantes arbitrarias.

**Ejemplo 4.** Hallar la solución general de la ecuación

$$y^{\mathrm{IV}} - y = 0.$$

**Solución.** Formemos la ecuación característica

$$k^4 - 1 = 0.$$

Hallemos las raíces de esta ecuación

$$k_1 = 1,\ k_2 = -1,\ k_3 = i,\ k_4 = -i.$$

La integral general es:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + A \cos x + B \operatorname{sen} x,$$

donde $C_1, C_2, A, B$ son constantes arbitrarias.

**Observación 2.** De lo expuesto se deduce que toda la dificultad para resolver una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes consiste en la resolución de la ecuación característica correspondiente.

## § 23. ECUACIONES LINEALES NO HOMOGENEAS DE SEGUNDO ORDEN

Sea una ecuación lineal no homogénea de segundo orden

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \tag{1}$$

La estructura de la solución general de tal ecuación (1) se determinará por el teorema siguiente:

**Teorema 1.** *La solución general de la ecuación no homogénea (1) se representa como suma de cualquier solución particular* $y^*$ *de esta ecuación y de la solución general* $\bar{y}$ *de la ecuación homogénea correspondiente*

$$\bar{y}'' + a_1 \bar{y}' + a_2 \bar{y} = 0. \tag{2}$$

**Demostración.** Es preciso demostrar que la suma

$$y = \bar{y} + y^* \tag{3}$$

es la **solución general** de la ecuación (1).

Demostremos primeramente que la función (3) es una solución de la ecucación (1).

Sustituyendo la suma $\bar{y} + y^*$ en la ecuación (1), en lugar de $y$, tenemos:

$$(\bar{y} + y^*)'' + a_1 (\bar{y} + y^*)' + a_2 (\bar{y} + y^*) = f(x)$$

ó

$$(\bar{y}'' + a_1 \bar{y}' + a_2 \bar{y}) + (y^{*\prime\prime} + a_1 y^{*\prime} + a_2 y^*) = f(x). \tag{4}$$

Como $\bar{y}$ es una solución de la ecuación (2), la expresión encerrada en el primer paréntesis es idénticamente igual a cero. Como $y^*$ es una solución de la ecuación (1), la expresión encerrada en el segundo paréntesis es igual a $f(x)$. Por tanto, la igualdad (4) es una identidad, quedándose demostrada la primera parte del teorema.

Demostremos, ahora, que la expresión (3) es la solución general de la ecuación (1), es decir, que se pueden elegir las constantes arbitrarias que la integran de modo que se satisfagan las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} y_{x=x_0} = y_0, \\ y_{x=x_0} = y_0', \end{array}\right\} \tag{5}$$

cualesquiera que sean $x_0$, $y_0$ e $y_0'$ (siempre y cuando $x_0$ se toma en el dominio donde las funciones $a_1$, $a_2$ y $f(x)$ son continuas).

Notemos que $\bar{y}$ se puede escribir en la forma:

$$\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2,$$

donde $y_1$ e $y_2$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (2); y $C_1$, $C_2$ son constantes arbitrarias. La ecuación (3) se puede presentar en la forma:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + y^*. \tag{3'}$$

En virtud de las condiciones (5), tenemos*):

$$C_1y_{10} + C_2y_{20} + y_0^* = y_0,$$
$$C_1y_{10}' + C_2y_{20}' + y_0^{*\prime} = y_0'.$$

De este sistema de ecuaciones es preciso determinar $C_1$ y $C_2$. Escribamos el sistema en la forma:

$$\left.\begin{aligned} C_1y_{10} + C_2y_{20} &= y_0 - y_0^*, \\ C_1y_{10}' + C_2y_{20}' &= y_0' - y_0^{*\prime}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Notemos que el determinante de este sistema es el Wronskiano de las funciones $y_1$ e $y_2$ en el punto $x = x_0$. Puesto que, según la hipótesis, estas funciones son linealmente independientes, el Wronskiano no puede ser nulo. Por consiguiente, el sistema (6) tiene una solución bien determinada, $C_1$ y $C_2$, es decir, existen los valores $C_1$ y $C_2$ tales que la fórmula (3) determina la solución de la ecuación (1) que satisface las condiciones iniciales dadas. El teorema queda completamente demostrado.

Se puede concluir, pues, que si se conoce la solución general $\bar{y}$ de la ecuación homogénea (2), la tarea principal durante la integración de una ecuación no homogénea (1) consiste en la búsqueda de una solución particular cualquiera $y^*$ de la última.

*Indiquemos un método general para hallar las soluciones particulares* de una ecuación no homogénea.

**Método de variación de constantes arbitrarias.** Escribamos la solución general de la ecuación homogénea (2):

$$y = C_1y_1 + C_2y_2. \tag{7}$$

Busquemos una solución particular de la ecuación no homogénea (1) en la forma (7), considerando $C_1$ y $C_2$ como **funciones de $x$, las que es preciso determinar.**

Derivemos la igualdad (7):

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' + C_1'y_1 + C_2'y_2.$$

*) Aquí, $y_{10}$, $y_{20}$, $y_0^*$, $y_{10}'$, $y_{20}'$, $y_0^{*\prime}$ son los valores numéricos de las funciones $y_1$, $y_2$, $y^*$, $y_1'$, $y_2'$, $y^{*\prime}$ cuando $x = x_0$.

Elijamos las funciones $C_1$ y $C_2$ de modo que se verefique la igualdad

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0. \tag{8}$$

Tomando en consideración esta condición adicional, la primera derivada $y'$ toma la forma:

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2'.$$

Derivando esta expresión, hallamos $y''$:

$$y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1'y_1' + C_2'y_2'.$$

Introduciendo $y$, $y'$, $y''$ en la ecuación (1), obtenemos:

$$C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1'y_1' + C_2'y_2' + a_1(C_1y_1' + C_1y_2') + \\ + a_2(C_1y_1 + C_2y_2) = f(x)$$

ó

$$C_1(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + C_2(y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).$$

Las expresiones encerradas entre los dos primeros paréntesis se reducen a cero, puesto que $y_1$ e $y_2$ son las soluciones de la ecuación homogénea. Por consiguiente, la última ecuación toma la forma:

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \tag{9}$$

Así, la función (7) es una solución de la ecuación (1), no homogénea, cuando las funciones $C_1$ y $C_2$ satisfacen al sistema de ecuaciones (8) y (9), es decir, si

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \qquad C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).$$

Como el determinante de este sistema es un Wronskiano de las funciones linealmente independientes $y_1$ e $y_2$, éste no es nulo; por tanto, resolviendo el sistema, hallemos $C_1'$ y $C_2'$ como funciones determinadas de $x$:

$$C_1' = \varphi_1(x), \qquad C_2' = \varphi_2(x).$$

Integrando tenemos:

$$C_1 = \int \varphi_1(x)\,dx + \bar{C}_1; \qquad C_2 = \int \varphi_2(x)\,dx + \bar{C}_2,$$

donde $\bar{C}_1$ y $\bar{C}_2$ son las constantes de integración.

Introduciendo las expresiones obtenidas de $C_1$ y $C_2$ en la igualdad (7) hallemos una integral dependiente de dos constantes arbitrarias $\bar{C}_1$ y $\bar{C}_2$, es decir, la solución general de la ecuación no homogénea*).

---

*) Al hacer $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = 0$, obtendremos una solución particular de la ecuación (1).

**Ejemplo.** Hallar la solución general de la ecuación

$$y''-\frac{y'}{x}=x.$$

**Solución.** Hallemos la solución general de la ecuación homogénea:

$$y''-\frac{y'}{x}=0.$$

Como $\frac{y''}{y'}=\frac{1}{x}$, tenemos $\ln y'=\ln x+\ln c$; $y'=cx$; así:

$$y=C_1x^2+C_2.$$

Para que esta expresión sea la solución de la ecuación dada, es preciso determinar $C_1$ y $C_2$ como funciones de $x$ del sistema

$$C_1'x^2+C_2'\cdot 1=0,\quad 2C_1'x+C_2'\cdot 0=x.$$

Resolviendo este sistema encontramos:

$$C_1'=\frac{1}{2},\quad C_2'=-\frac{1}{2}x^2,$$

de donde, por integración, obtenemos:

$$C_1=\frac{x}{2}+\overline{C}_1,\quad C_2=-\frac{x^3}{6}+\overline{C}_2.$$

Introduciendo las funciones halladas en la fórmula $y=C_1x^2+C_2$, obtenemos la solución general de una ecuación no homogénea:

$$y=\overline{C}_1x^2+\overline{C}_2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}$$

ó $y=\overline{C}_1x^2+\overline{C}_2+\frac{x^3}{3}$, donde $\overline{C}_1$ y $\overline{C}_2$ *son constantes arbitrarias.*

Para buscar las soluciones particulares, se puede utilizar el siguiente teorema.

**Teorema 2.** *Sea una ecuación no homogénea*

$$y''+a_1y'+a_2y=f_1(x)+f_2(x) \tag{10}$$

*tal que su segundo miembro es la suma de dos funciones* $f_1(x)$ *y* $f_2(x)$. *Si* $y_1$ *es una solución particular de la ecuación*

$$y''+a_1y'+a_2y=f_1(x), \tag{11}$$

*e* $y_2$, *una solución particular de la ecuación*

$$y''+a_1y'+a_2y=f_2(x), \tag{12}$$

*entonces,* $y_1+y_2$ *es una solución particular**) *de la ecuación (10).*

---

*) Evidentemente, el teorema correspondiente es válido para cualquier número de sumandos del segundo miembro.

**Demostración.** Introduciendo la expresión $y_1 + y_2$ en la ecuación (10), obtenemos:

$$(y_1 + y_2)'' + a_1 (y_1 + y_2)' + a_2 (y_1 + y_2) = f_1 (x) + f_2 (x)$$

ó

$$(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = f_1 (x) + f_2 (x). \quad (13)$$

De las igualdades (11) y (12) se deduce que (13) es una identidad. El teorema queda demostrado.

## § 24. ECUACIONES LINEALES NO HOMOGENEAS DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

Sea la ecuación diferencial

$$y'' + py' + qy = f (x), \quad (1)$$

donde $p$ y $q$ son números reales.

En el párrafo anterior hemos dado un método general para hallar las soluciones de las ecuaciones no homogéneas. Si la ecuación tiene coeficientes constantes, a veces, es más fácil hallar una solución particular, sin recurrir a la integración. Examinemos algunas variantes que se utilizan para resolver la ecuación (1).

1. Supongamos que el segundo miembro de la ecuación (1) sea el producto de una función exponencial por un polinomio, que tiene la forma:

$$f (x) = P_n (x) e^{\alpha x}, \quad (2)$$

donde $P_n (x)$ es un polinomio de $n$-ésimo grado. Entonces son posibles los siguientes casos particulares:

a) El número $\alpha$ **no es una raíz** de la ecuación característica

$$k^2 + pk + q = 0.$$

En este caso, es preciso hallar la solución particular en la forma:

$$y^* = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n) e^{\alpha x} = Q_n (x) e^{\alpha x}. \quad (3)$$

En efecto, introduciendo $y^*$ en la ecuación (1), y reduciendo todos los términos por $e^{\alpha x}$, tenemos:

$$Q_n'' (x) + (2\alpha + p) Q_n' (x) + (\alpha^2 + p\alpha + q) Q_n (x) = P_n (x). \quad (4)$$

$Q_n (x)$ es un polinomio de $n$-ésimo grado, $Q_n' (x)$ es un polinomio de $(n - 1)$-ésimo grado: $Q_n'' (x)$, es de $(n - 2)$-ésimo grado. Por consiguiente, a la derecha y a la izquierda del signo de igualdad se hallan polinomios de $n$-ésimo grado. Igualando los coeficientes de las mismas potencias de $x$ (el número de los coeficientes desconocidos es igual a $n + 1$), obtenemos un sistema de $n + 1$ ecuaciones para determinar los coeficientes $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$.

b) El número $\alpha$ es una **raíz simple** de la ecuación característica. Si procuramos hallar una solución particular en la forma (3), obtenemos en el primer miembro de la igualdad (4) un polinomio de $(n-1)$ — ésimo grado, puesto que el coeficiente de $Q_n(x)$, es decir, $\alpha^2 + p\alpha + q$, es nulo y los polinomios $Q'_n(x)$ y $Q''_n(x)$ son de grados inferiores a $n$. Por consiguiente, la igualdad (4) no puede ser una identidad cualesquiera que sean $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Por esto, en el caso examinado busquemos la solución particular, en la forma de un polinomio de $(n+1)$-ésimo grado sin término absoluto (puesto que éste se elimina durante la derivación)*): $y^* = xQ_n(x)e^{\alpha x}$.

c) $\alpha$ es una **raíz doble de la** ecuación característica. Entonces, al ser sustituida la función $Q_n(x)e^{\alpha x}$ en la ecuación diferencial, el grado de polinomio disminuye en dos unidades. En efecto, si $\alpha$ es una raíz de la ecuación característica, tenemos: $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$; además, puesto que $\alpha$ es una raíz doble, tenemos $2\alpha = -p$ (según el teorema de álgebra elemental, la suma de las raíces de la ecuación de segundo grado reducida es igual al coeficiente del término desconocido de primero grado tomado con signo contrario). Por eso, $2\alpha + p = 0$.

Por consiguiente, en el primer miembro de la igualdad (4) queda $Q''_n(x)$, es decir, un polinomio de $(n-2)$-ésimo grado. Para obtener como resultado de la sustitución, un polinomio de $n$-ésimo grado, es preciso buscar una solución particular en la forma de producto de $e^{\alpha x}$ por un polinomio de $(n+2)$-ésimo grado. Entonces, el término absoluto de este polinomio y el término de primer grado se eliminan durante la derivación. Por esto, se pueden omitir en la solución particular.

Así, cuando $\alpha$ es una raíz doble de la ecuación característica, se puede tomar una solución particular en la forma:

$$y^* = x^2 Q_n(x) e^{\alpha x}.$$

**Ejemplo 1.** Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + 4y' + 3y = x.$$

**Solución.** La solución general de la ecuación homogénea correspondiente es:

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

Como el segundo miembro de la ecuación no homogénea tiene la forma $xe^{0x}$, [es decir, la forma $P_1(x)e^{0x}$], y 0 no es raíz de la ecuación característica $k^2 + 4k + 3 = 0$, busquemos una solución particular en la forma $y^* = Q_1(x)e^{0x}$, es decir, haremos:

$$y^* = A_0 x + A_1.$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación dada, tenemos:

$$4A_0 + 3(A_0 x + A_1) = x.$$

*) Notemos que todos los resultados expuestos arriba son válidos también cuando $\alpha$ es un número complejo (esto se deduce de las reglas de derivación de la función $e^{mx}$, donde $m$ es un número complejo arbitrario; véase § 4, cap. VII).

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de $x$, obtenemos:

$$3A_0 = 1,\ 4A_0 + 3A_1 = 0,$$

de donde:

$$A_0 = \frac{1}{3};\quad A_1 = -\frac{4}{9}.$$

Por consiguiente,

$$y^* = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}.$$

La solución general $y = \bar{y} + y^*$ será:

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}.$$

**Ejemplo 2.** Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + 9y = (x^2 + 1)\,e^{3x}.$$

**Solución:** La solución general de la ecuación homogénea se halla fácilmente:

$$\bar{y} = C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x.$$

El segundo miembro de la ecuación dada, $(x^2 + 1)\,e^{3x}$ tiene la forma:

$$P_2(x)\,e^{3x}.$$

Como el coeficiente 3 en el exponente de potencia no es raíz de la ecuación característica, busquemos una solución particular de la forma:

$$y^* = Q_2(x)\,e^{3x} \quad \text{ó} \quad y^* = (Ax^2 + Bx + C)\,e^{3x}.$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación diferencial, tenemos:

$$[9(Ax^2 + Bx + C) + 6(2Ax + B) + 2A + 9(Ax^2 + Bx + C)]e^{3x} = \\ = (x^2 + 1)\,e^{3x}.$$

Reduciendo ambos miembros por $e^{3x}$ e igualando los coeficientes de las mismas potencias de $x$, obtenemos:

$$18A = 1,\ 12A + 18B = 0,\ 2A + 6B + 18C = 1,$$

de donde: $A = \frac{1}{18}$; $B = -\frac{1}{27}$; $C = \frac{5}{81}$. Por consiguiente, la solución particular es:

$$y^* = \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81}\right)e^{3x}$$

y la solución general,

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x + \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81}\right)e^{3x}.$$

**Ejemplo 3.** Hallar la solución de la ecuación:

$$y'' - 7y' + 6y = (x - 2)\,e^x.$$

**Solución.** El segundo miembro de la ecuación tiene la forma $P_1(x)\,e^{1\cdot x}$; donde el coeficiente 1 del exponente es raíz simple de un polinomio característico. Por tanto, busquemos una solución particular de la forma $y^* = xQ_1(x)\,e^x$ ó

$$y^* = x\,(Ax + B)\,e^x;$$

poniendo esta expresión en la ecuación, tenemos:

$$[(Ax^2 + Bx) + (4Ax + 2B) + 2A - 7(Ax^2 + Bx) - 7(2Ax + B) + \\ + 6(Ax^2 + Bx)]e^x = (x - 2)e^x$$

ó

$$(-10Ax - 5B + 2A)e^x = (x - 2)e^x.$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de $x$ obtenemos:

$$-10A = 1, \quad -5B + 2A = 2,$$

de donde: $A = -\frac{1}{10}$, $B = \frac{9}{25}$. Por tanto, la solución particular es:

$$y^* = x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right)e^x,$$

y la solución general:

$$y = C_1e^{6x} + C_2e^x + x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right)e^x.$$

II. Supongamos que el segundo miembro tiene la forma:

$$f(x) = P(x)\,e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)\,e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, \tag{5}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Se puede analizar este caso mediante el procedimiento usado anteriormente, pasando de las funciones trigonométricas a las exponenciales.

Sustituyendo $\cos\beta x$ y $\operatorname{sen}\beta x$ por sus funciones exponenciales, según las fórmulas de Euler (véase § 5 cap. VII) obtenemos:

$$f(x) = P(x)\,e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + Q(x)\,e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}$$

ó

$$f(x) = \left[\frac{1}{2}P(x) + \frac{1}{2i}Q(x)\right]e^{(\alpha + i\beta)x} + \\ + \left[\frac{1}{2}P(x) - \frac{1}{2i}Q(x)\right]e^{(\alpha - i\beta)x}. \tag{6}$$

Entre corchetes se encuentran los polinomios cuyos grados son iguales al grado superior de $P(x)$ y $Q(x)$. Resulta que hemos obtenido el segundo miembro de la forma tal, como en el caso I.

Es posible demostrar (aunque lo admitamos sin demostración) que se pueden hallar soluciones particulares que no contengan números complejos.

Por consiguiente, si el segundo miembro de la ecuación (1) tiene la forma

$$f(x) = P(x)\,e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)\,e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, \tag{7}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de $x$, la solución particular se determina así:

a) si número $\alpha + i\beta$ no es una raíz de la ecuación característica, es preciso buscar una solución particular de la ecuación (1) en la forma:

$$y^* = U(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, \tag{8}$$

donde, $U(x)$ y $V(x)$ son polinomios cuyo grado es igual al grado superior de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$;

b) si el número $\alpha + i\beta$ es una raíz de la ecuación característica, una solución particular adquiere la forma:

$$y^* = x\,[U(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x]. \tag{9}$$

Para evitar errores eventuales notemos que las formas indicadas de las soluciones particulares (8) y (9) son válidas también, evidentemente, cuando en el segundo miembro de la ecuación (1) uno de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es idénticamente igual a cero, es decir, cuando el segundo miembro es de la forma:

$$P(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{ó} \quad Q(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.$$

Consideremos, ahora, un importante caso particular. Supongamos que el segundo miembro de una ecuación lineal de segundo orden es:

$$f(x) = M \cos \beta x + N \operatorname{sen} \beta x, \tag{7'}$$

donde, $M$ y $N$ son las constantes.

a) Si $\beta i$ no es una raíz de la ecuación característica, busquemos una solución particular de la forma:

$$y^* = A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x. \tag{8'}$$

b) Si $\beta i$ es una raíz de la ecuación característica, busquemos una solución particular de la forma:

$$y^* = x\,(A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x). \tag{9'}$$

Notemos que la función (7′) es un caso particular de la función (7) ($P(x) = M$, $Q(x) = N$, $\alpha = 0$); las funciones (8′) y (9′) son casos particulares de las funciones (8) y (9).

**Ejemplo 4.** Hallar la integral general de la ecuación lineal no homogénea

$$y'' + 2y' + 5y = 2 \cos x.$$

**Solución.** La ecuación característica

$$k^2 + 2k + 5 = 0$$

tiene las raíces: $k_1 = -1 + 2i$; $k_2 = -1 - 2i$. Por eso, la integral general de la ecuación homogénea correspondiente es:

$$\bar{y} = e^{-x}\,(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x).$$

Busquemos una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma:

$$y^* = A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x,$$

donde, $A$ y $B$ son los coeficientes constantes a determinar. Introduciendo $y^*$ en la ecuación dada, tenemos:

$$-A\cos x - B\,\mathrm{sen}\,x + 2\,(-A\,\mathrm{sen}\,x + B\cos x) +$$
$$+5\,(A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x) = 2\cos x.$$

Igualando los coeficientes de $\cos x$ y $\mathrm{sen}\,x$, obtenemos dos ecuaciones para determinar $A$ y $B$:

$$-A + 2B + 5A = 2;\ \ -B - 2A + 5B = 0,$$

de donde

$$A = \frac{2}{5};\ \ B = \frac{1}{5}.$$

La solución general de la ecuación dada es: $y = \bar{y} + y^*$, es decir,

$$y = e^{-x}\,(C_1\cos 2x + C_2\,\mathrm{sen}\,2x) + \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{10}\,\mathrm{sen}\,x.$$

**Ejemplo 5.** Hallar la solución de la ecuación

$$y'' + 4y = \cos 2x.$$

**Solución.** Las raíces de la ecuación característica son: $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$; por tanto, la solución general de la ecuación homogénea tiene la forma:

$$\bar{y} = C_1\cos 2x + C_2\,\mathrm{sen}\,2x.$$

Busquemos una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma:

$$y^* = x\,(A\cos 2x + B\,\mathrm{sen}\,2x).$$

Entonces,

$$y^{*\prime} = 2x\,(-A\,\mathrm{sen}\,2x + B\cos 2x) + (A\cos 2x + B\,\mathrm{sen}\,2x),$$
$$y^{*\prime\prime} = -4x\,(-A\cos 2x - B\,\mathrm{sen}\,2x) + 4\,(-A\,\mathrm{sen}\,2x + B\cos 2x).$$

Introduciendo estas expresiones de las derivadas en la ecuación dada e igualando los coeficientes de $\cos 2x$ y $\mathrm{sen}\,2x$, obtenemos un sistema de ecuaciones para determinar $A$ y $B$:

$$4B = 1;\quad -4A = 0,$$

de donde $A = 0$; $B = \frac{1}{4}$. Pues, la integral general de la ecuación dada es:

$$y = C_1\cos 2x + C_2\,\mathrm{sen}\,2x + \frac{1}{4}\,x\,\mathrm{sen}\,2x.$$

**Ejemplo 6.** Hallar la solución de la ecuación

$$y'' - y = 3e^{2x}\cos x.$$

**Solución.** El segundo miembro de la ecuación tiene la forma:

$$f(x) = e^{2x}\,(M\cos x + N\,\mathrm{sen}\,x),$$

siendo $M = 3$ y $N = 0$. Las raíces de la ecuación característica $k^2 - 1 = 0$ son: $k_1 = 1$, $k_2 = -1$. La solución general de la ecuación homogénea es:

$$\bar{y} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}.$$

Como el número $\alpha + i\beta = 2 + i \cdot 1$ no es raíz de la ecuación característica, busquemos una solución particular de la forma: $y^* = e^{2x}(A\cos x + B\operatorname{sen} x)$.

Poniendo esta expresión en la ecuación y efectuando la reducción de los términos semejantes, obtenemos:

$$(2A + 4B)\, e^{2x}\cos x + (-4A + 2B)\, e^{2x}\operatorname{sen} x = 3e^{2x}\cos x.$$

Igualando los coeficientes de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$, tenemos:

$$2A + 4B = 3, \quad -4A + 2B = 0.$$

De donde: $A = \frac{3}{10}$; $B = \frac{3}{5}$. Por consiguiente, la solución particular es:

$$y^* = e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\operatorname{sen} x\right),$$

y la general,

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\operatorname{sen} x\right).$$

## § 25. ECUACIONES LINEALES NO HOMOGENEAS DE ORDENES SUPERIORES

Sea la ecuación

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = f(x), \tag{1}$$

donde, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $f(x)$ son funciones continuas de $x$ (o constantes).

Supongamos que se conoce la solución general:

$$\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n \tag{2}$$

de la ecuación homogénea:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_ny = 0. \tag{3}$$

Igual que en el caso de la ecuación de segundo orden, para la ecuación (1) es válido el siguiente teorema:

**Teorema.** *Si $\bar{y}$ es la solución general de la ecuación homogénea (3), e $y^*$ es una solución particular de la ecuación no homogénea (1), entonces*

$$Y = \bar{y} + y^*$$

*es la solución general de la ecuación no homogénea.*

Así, análogamente al caso de la ecuación de segundo orden, la integración de la ecuación (1) se reduce a la búsqueda de una solución particular de la ecuación no homogénea.

Igual que para la ecuación de segundo orden, se puede encontrar una solución particular de la ecuación (1) por el método de la variación de las constantes arbitrarias, suponiendo que en la expresión (2) $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son las funciones de $x$.

Formemos el sistema de ecuaciones (comparar § 23):

$$\left.\begin{array}{r} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x). \end{array}\right\} \quad (4)$$

Este sistema de ecuaciones, con funciones desconocidas $C_1'$, $C_2'$, . . . . . ., $C_n'$, tiene soluciones bien determinadas. (El determinante de los coeficientes de $C_1'$, $C_2'$, . . ., $C_n'$, es el Wronskiano compuesto por las soluciones particulares $y_1$, $y_2$, . . ., $y_n$ de la ecuación homogénea y como, según la hipótesis, estas soluciones particulares son linealmente independientes, el Wronskiano es distinto de cero).

Así, el sistema (4) puede ser resuelto respecto a las funciones $C_1'$, $C_2'$, . . ., $C_n'$. Después de hallar estas funciones e integrarlas, obtenemos:

$$C_1 = \int C_1'\,dx + \bar{C}_1;\ C_2 = \int C_2'\,dx + \bar{C}_2;\ \ldots;\ C_n = \int C_n'\,dx + \bar{C}_n,$$

donde $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$, . . ., $\overline{C}_n$ son las constantes de integración.

Demostremos que en este caso la expresión

$$y^* = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n \quad (5)$$

es la solución general de la ecuación no homogénea (1).

Derivemos $n$ veces la expresión (5), tomando cada vez en consideración las igualdades (4); entonces tenemos:

$$\begin{array}{r} y^* = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y + \ldots + C_ny_n, \\ y^{*\prime} = C_1y_1' + C_2y_2' + C_3y_3' + \ldots + C_ny_n', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{*(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}, \\ y^{*(n)} = C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)} + \cdots + C_ny_n^{(n)} + f(x). \end{array}$$

Multiplicando los términos de la primera ecuación por $a_n$, los de la segunda, por $a_{n-1}$, . . ., y, finalmente, los de la penúltima ecuación por $a_1$ y sumando, obtenemos:

$$y^{*(n)} + a_1y^{*(n-1)} + \ldots + a_ny^* = f(x),$$

puesto que $y_1$, $y_2$, . . ., $y_n$ son las soluciones particulares de la ecuación homogénea y, por consiguiente, son nulas las sumas de los términos por columnas.

Por consiguiente, la función $y^* = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$ [donde $C_1$, . . ., $C_n$ son las funciones de $x$, determinadas de las ecuacio-

nes (4)] es una solución de la ecuación no homogénea (1), y, como la solución depende de $n$ constantes arbitrarias $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n$, ésta es también la solución general.

El teorema queda demostrado.

A veces, se puede hallar más fácil las soluciones particulares de una ecuación no homogénea de orden superior con coeficientes constantes (§ 24). Se usan siguientes procedimientos:

1. Supongamos que el segundo miembro de la ecuación diferencial sea una función $f(x) = P(x)\, e^{\alpha x}$, donde $P(x)$ es un polinomio de $x$. Es preciso distinguir dos casos:

a) si $\alpha$ no es una raíz de la ecuación característica, busquemos una solución particular de la forma:

$$y^* = Q(x)\, e^{\alpha x},$$

donde $Q(x)$ es un polinomio del mismo grado que $P(x)$, pero con coeficientes indeterminados;

b) si $\alpha$ es una raíz de multiplicidad $\mu$ de la ecuación característica, busquemos una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma:

$$y^* = x^{\mu} Q(x)\, e^{\alpha x},$$

donde $Q(x)$ es un polinomio del mismo grado que $P(x)$.

II. Supongamos que el segundo miembro de la ecuación es de la forma:

$$f(x) = M \cos \beta x + N \operatorname{sen} \beta x,$$

donde $M$ y $N$ son números constantes. Entonces, la forma de la solución particular se define del modo siguiente:

a) si $\beta i$ no es una raíz de la ecuación característica, la solución particular es de la forma:

$$y^* = A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x,$$

donde $A$ y $B$ son coeficientes constantes indeterminados;

b) si $\beta i$ es una raíz de la ecuación característica de multiplicidad $\mu$, entonces:

$$y^* = x^{\mu} (A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x).$$

III. Sea

$$f(x) = P(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x,$$

donde, $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de $x$. Entonces:

a) si $\alpha + \beta i$ no es una raíz del polinomio característico, busquemos una solución particular de la forma:

$$y^* = U(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x,$$

donde $U(x)$ y $V(x)$ son polinomios cuyo grado es igual al grado superior de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$;

b) si $\alpha + \beta i$ es una raíz de multiplicidad $\mu$ del polinomio característico, busquemos una solución particular de la forma:

$$y^* = x^\mu [U(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x) e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x],$$

donde $U(x)$ y $V(x)$ tienen el mismo significado que en el caso a).

**Observación general respecto a los casos II y III.** Si en el segundo miembro de la ecuación se halla una expresión que contenga sólo *cos* $\beta x$ *ó sen* $\beta x$, es preciso buscar una solución de la forma indicada arriba, es decir, con un seno y un coseno. En otras palabras, del hecho de que el segundo miembro no contenga cos $\beta x$ ó sen $\beta x$ de ninguna manera se deduce que la solución particular de la ecuación no contiene estas funciones. Podemos convencernos de lo último, examinando los ejemplos 4, 5, 6 del párrafo anterior, así como el ejemplo 2 del párrafo presente.

**Ejemplo 1.** Hallar la solución general de la ecuación

$$y^{IV} - y = x^3 + 1.$$

**Solución.** Las raíces de la ecuación característica $k^4 - 1 = 0$ son:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = i, \; k_4 = -i.$$

Hallemos la solución general de la ecuación homogénea (véase el ejemplo 4 § 22):

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x.$$

Busquemos una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma:

$$y^* = A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3.$$

Derivando $y^*$ cuatro veces e introduciendo las expresiones obtenidas en la ecuación dada, tenemos:

$$-A_0 x^3 - A_1 x^2 - A_2 x - A_3 = x^3 + 1.$$

Igualemos los coeficientes de las mismas potencias de $x$:

$$-A_0 = 1; \quad -A_1 = 0; \quad -A_2 = 0; \quad -A_3 = 1.$$

Por tanto,

$$y^* = -x^3 - 1.$$

Hallemos la integral general de la ecuación no homogénea según la fórmula: $y = \bar{y} + y^*$, es decir,

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x - x^3 - 1.$$

**Ejemplo 2.** Hallar la solución de la ecuación

$$y^{IV} - y = 5 \cos x.$$

**Solución.** Las raíces de la ecuación característica $k^4 - 1 = 0$ son: $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = i$, $k_4 = -i$. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea correspondiente es:

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x.$$

Luego, el segundo miembro de la ecuación no homogénea dada tiene la forma:

$$f(x) = M \cos x + N \operatorname{sen} x,$$

donde $M = 5$, $N = 0$.

Como $i$ es una raíz simple de la ecuación característica, busquemos una solución particular de la forma:

$$y^* = x(A \cos x + B \operatorname{sen} x).$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación, hallamos:

$$4A \operatorname{sen} x - 4B \cos x = 5 \cos x,$$

de donde

$$4A = 0, \quad -4B = 5,$$

ó, $A = 0$, $B = -\frac{5}{4}$.

La solución particular de la ecuación diferencial dada es, entonces:

$$y^* = -\frac{5}{4} x \operatorname{sen} x,$$

y la solución general es:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x - \frac{5}{4} x \operatorname{sen} x.$$

## § 26. ECUACION DIFERENCIAL DE OSCILACIONES MECANICAS

El objeto del párrafo presente y de los siguientes es el estudio de un problema de la mecánica aplicada con ayuda de las ecuaciones diferenciales lineales.

Supongamos que una carga de masa $Q$ reposa sobre un resorte elástico (fig. 268). Designemos por $y$ la desviación de la carga de

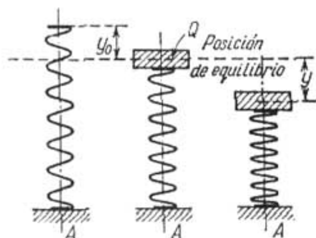



*Fig. 268*

su posición de equilibrio. Consideremos la desviación hacia abajo como positiva y hacia arriba, como negativa. En la posición de equilibrio la fuerza del peso es compensada por la elasticidad del resorte. Supongamos que la fuerza que tiende a volver la carga a la

posición de equilibrio, llamada elástica, sea proporcional a la desviación, es decir, la fuerza elástica es igual a $-ky$, donde $k$ es una magnitud constante para el resorte dado (así llamada «rigidez del resorte»)*).

Supongamos que al movimiento de la carga $Q$ se opone una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad del movimiento de la

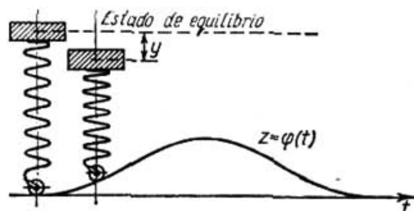



*Fig. 269*

carga respecto al punto más bajo del resorte, es decir: una fuerza $-\lambda v = -\lambda \frac{dy}{dt}$, donde $\lambda = \text{const} > 0$ (amortiguador). Formemos la ecuación diferencial del movimiento de la carga sobre el resorte. En virtud de la segunda ley de Newton tenemos:

$$Q \frac{d^2y}{dt^2} = -ky - \lambda \frac{dy}{dt} \tag{1}$$

(aquí, $k$ y $\lambda$ son números positivos). Hemos obtenido una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.

Escribámosla en la forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = 0, \tag{1'}$$

donde

$$p = \frac{\lambda}{Q}; \quad q = \frac{k}{Q}.$$

*Supongamos, ahora, que el punto inferior del resorte efectúa* movimientos verticales según la ley $z = \varphi(t)$. Este fenómeno puede tener lugar, por ejemplo, cuando el extremo inferior del resorte está fijado a un rodillo que junto con el resorte y la carga se mueve a lo largo de un camino de relieve desigual (fig. 269).

---

*) Los resortes cuya fuerza elástica es proporcional a la deformación se laman *resortes con «característica lineal»*.

En este caso la fuerza elástica no es igual a $-ky$, sino a $-k\,[y + \varphi(t)]$; la fuerza de resistencia será $-\lambda\,[y' + \varphi'(t)]$, y en lugar de la ecuación (1) obtenemos la ecuación:

$$Q\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\frac{dy}{dt} + ky = -k\varphi(t) - \lambda\varphi'(t) \tag{2}$$

ó

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f(t), \tag{2'}$$

donde:

$$f(t) = -\frac{k\varphi(t) + \lambda\varphi'(t)}{Q}.$$

Hemos obtenido una ecuación diferencial no homogénea de segundo orden.

La ecuación (1') se llama ecuación de las oscilaciones *libres*; la (2'), de las oscilaciones *forzadas*.

### § 27. OSCILACIONES LIBRES

Examinemos primero la ecuación de las oscilaciones libres

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Escribamos la ecuación característica correspondiente:

$$k^2 + pk + q = 0,$$

y hallemos sus raíces:

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \qquad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

1) Sea $\frac{p^2}{4} > q$. En este caso las raíces $k_1$ y $k_2$ son números reales negativos. La solución general se expresa mediante funciones exponenciales:

$$y = C_1e^{k_1t} + C_2e^{k_2t} \qquad (k_1 < 0,\ k_2 < 0). \tag{1}$$

De esta fórmula se deduce que cualesquiera que sean las condiciones iniciales, la desviación $y$ tiende asintóticamente a cero, cuando $t \to \infty$. En el caso dado no habrán oscilaciones, puesto que las fuerzas de frenado son grandes en comparación con el coeficiente de rigidez $k$ del resorte.

2) Sea $\frac{p^2}{4} = q$ ; entonces la raíz $k_1$ equivale a $k_2$ y ambas son iguales al número negativo $-\frac{p}{2}$. Por tanto, la solución general es:

$$y = C_1 e^{-\frac{p}{2}t} + C_2 t e^{-\frac{p}{2}t} = (C_1 + C_2 t)\, e^{-\frac{pt}{2}}. \qquad (2)$$

Aquí la desviación también tiende a cero para $t \to \infty$, sin embargo, con menor velocidad que en el caso anterior (merced a la presencia del factor $C_1 + C_2 t$).

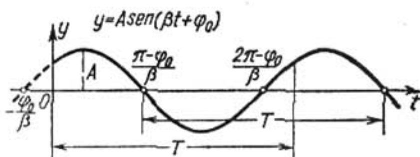



*Fig. 270*

3) Sea $p = 0$, es decir, supongamos que no hay fuerza de frenado. La ecuación característica tiene la forma:

$$k^2 + q = 0,$$

y sus raíces son: $k_1 = \beta i$; $k_2 = -\beta i$, donde $\beta = \sqrt{q}$.

La solución general es:

$$y = C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t \qquad (3)$$

Sustituyamos en la última fórmula las constantes arbitrarias $C_1$ y $C_2$ por otras $A$ y $\varphi_0$ ligadas con $C_1$ y $C_2$ por las relaciones:

$$C_1 = A \operatorname{sen} \varphi_0, \quad C_2 = A \cos \varphi_0.$$

Las constantes $A$ y $\varphi_0$ en función de $C_1$ y $C_2$ se determinan así:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \qquad \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{C_1}{C_2}.$$

Introduciendo los valores de $C_1$ y $C_2$ en la fórmula (3), obtenemos:

$$y = A \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \beta t + A \cos \varphi_0 \operatorname{sen} \beta t$$

ó

$$y = A \operatorname{sen} (\beta t + \varphi_0). \qquad (3')$$

Estas oscilaciones se llaman *armónicas*. Las curvas integrales son las sinusoides. El intervalo de tiempo $T$, durante el cual el

argumento del seno varía en $2\pi$, se llama *período* de oscilaciones; en nuestro caso $T = \frac{2\pi}{\beta}$. El número de oscilaciones durante el tiempo $2\pi$ se llama *frecuencia* de oscilaciones. En el caso dado la frecuencia es igual a $\beta$. La constante $A$ que es la desviación máxima

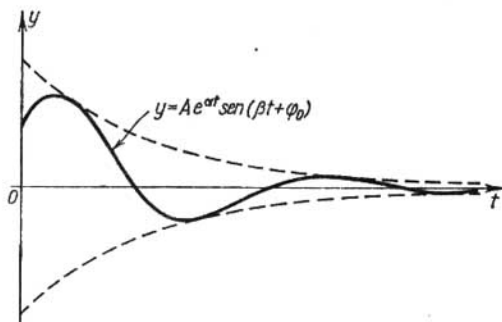



*Fig. 271*

a partir de la posición de equilibrio se llama *amplitud* de movimiento oscilatorio y $\varphi_0$ es la *fase inicial*. La gráfica de la función (3') se da en la figura 270.

4) Sea $p \neq 0$ y $\frac{p^2}{4} < q$.

En este caso las raíces de la ecuación característica son los números complejos:

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta,$$

donde

$$\alpha = -\frac{p}{2} < 0, \qquad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

La integral general tiene la forma:

$$y = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t) \tag{4}$$

ó

$$y = Ae^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t + \varphi_0). \tag{4'}$$

Como amplitud estamos obligados a tomar la magnitud $Ae^{\alpha t}$ que depende del tiempo. Como $\alpha < 0$, la magnitud tiende a cero cuando $t \to \infty$, es decir, en este caso, se trata de *oscilaciones amortiguadas*. La gráfica de estas oscilaciones se da en la figura 271.

## § 28. OSCILACIONES FORZADAS

La ecuación de las oscilaciones forzadas tiene la forma:

$$y'' + py' + qy = f(t).$$

Analicemos el importante caso práctico, cuando la fuerza perturbadora externa está representada por la función periódica

$$f(t) = a \operatorname{sen} \omega t;$$

entonces, la ecuación toma la forma

$$y'' + py' + qy = a \operatorname{sen} \omega t. \tag{1}$$

1) Supongamos al principio que $p \neq 0$ y $\frac{p^2}{4} < q$, es decir, las raíces de la ecuación característica son los números complejos $\alpha \pm i\beta$. En este caso (véase fórmulas (4) y (4′) § 27), la solución general de la ecuación homogénea tiene la forma:

$$\bar{y} = Ae^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t + \varphi_0). \tag{2}$$

Busquemos una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma:

$$y^* = M \cos \omega t + N \operatorname{sen} \omega t. \tag{3}$$

Introduciendo esta expresión de $y^*$ en la ecuación diferencial original, encontramos los valores de $M$ y $N$:

$$M = \frac{-p\omega a}{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}; \quad N = \frac{(q-\omega^2)\,a}{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}.$$

Antes de introducir los valores hallados de $M$ y $N$ en la igualdad (3), introduzcamos las nuevas constantes $A^*$ y $\varphi^*$, haciendo

$$M = A^* \operatorname{sen} \varphi^*, \quad N = A^* \cos \varphi^*,$$

es decir,

$$A^* = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}}, \qquad \operatorname{tg} \varphi^* = \frac{M}{N}.$$

Entonces, la solución particular de la ecuación no homogénea se puede escribir en la forma

$$y^* = A^* \operatorname{sen} \varphi^* \cos \omega t + A^* \cos \varphi^* \operatorname{sen} \omega t = A^* \operatorname{sen}(\omega t + \varphi^*),$$

o, en definitiva,

$$y^* = \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi^*).$$

La integral general de la ecuación (1) es igual a $y = \bar{y} + y^*$, es decir,

$$y = Ae^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}}\operatorname{sen}(\omega t + \varphi^*).$$

El primer término de la suma que se encuentra en el segundo miembro (la solución de la ecuación homogénea) representa las oscilaciones amortiguadas. Este término disminuye al crecer $t$, y, por tanto, dentro de cierto intervalo de tiempo, el segundo miembro adquiere el valor principal, que determina las oscilaciones forzadas. La frecuencia $\omega$ de estas oscilaciones es igual a la frecuencia de la fuerza externa $f(t)$; la amplitud de las oscilaciones forzadas es tanto mayor, cuanto menor es $p$ y cuanto más se acerque $\omega^2$ a $q$.

Analicemos más detalladamente cómo la amplitud de las oscilaciones forzadas depende de la frecuencia $\omega$, para diferentes valores de $p$. Designemos por $D(\omega)$ la amplitud de las oscilaciones forzadas:

$$D(\omega) = \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}}.$$

Hagamos $q = \beta_1^2$ (para $p = 0$; $\beta_1$ sería igual a la frecuencia de las oscilaciones propias). Entonces tenemos:

$$D(\omega) = \frac{a}{\sqrt{(\beta_1^2-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}} = \frac{a}{\beta_1^2\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\beta_1^2}\right)^2 + \frac{p^2}{\beta_1^2}\frac{\omega^2}{\beta_1^2}}}.$$

Introduzcamos las designaciones:

$$\frac{\omega}{\beta_1} = \lambda; \quad \frac{p}{\beta_1} = \gamma,$$

donde, $\lambda$ es la razón de la frecuencia de la fuerza perturbadora a la frecuencia de las oscilaciones libres del sistema; la constante $\lambda$ no depende de la fuerza perturbadora. La magnitud de la amplitud se expresa entonces por la fórmula:

$$\bar{D}(\lambda) = \frac{a}{\beta_1^2\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + \gamma^2\lambda^2}}. \quad (4)$$

Hallemos el máximo de esta función. Este corresponderá evidentemente al valor de $\lambda$, para el cual el cuadrado del denominador sea mínimo. Pero el mínimo de la función

$$\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + \gamma^2\lambda^2} \quad (5)$$

se alcanza cuando

$$\lambda = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2}},$$

y es igual a

$$\gamma \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Por tanto, la magnitud máxima de la amplitud es igual a

$$\overline{D}_{\text{máx}} = \frac{a}{\beta_1^2 \gamma \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}}.$$

Las gráficas de la función $\overline{D}(\lambda)$ para diferentes valores de $\gamma$, se dan en la figura 272 (para concretar las ideas, al construir las

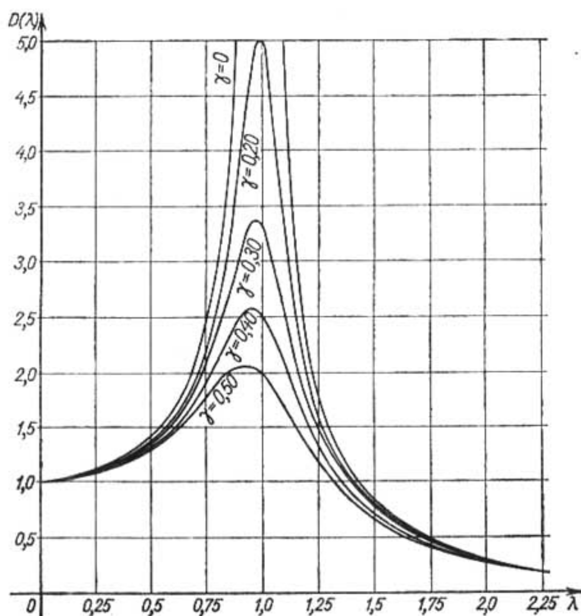



*Fig. 272*

gráficas, hagamos: $a = 1$, $\beta_1 = 1$). Estas curvas se llaman curvas de resonancia.

De la fórmula (5) se deduce que para $\gamma$ pequeñas el valor máximo de la amplitud se alcanza cuando los valores de $\lambda$ son próximos a la unidad, es decir, cuando la frecuencia de la fuerza externa es próxima a la de oscilaciones libres. Si $\gamma = 0$ (por tanto, $p = 0$), es decir, si no existe resistencia al movimiento, la amplitud de las oscilaciones forzadas crece indefinidamente cuando $\lambda \to 1$, es decir, para $\omega \to \beta_1 = \sqrt{q}$:

$$\lim_{\substack{\lambda \to 1 \\ (\gamma = 0)}} \overline{D}(\lambda) = \infty.$$

Cuando $\omega^2 = q$, tiene lugar el fenómeno de resonancia.

2) Supongamos ahora que $p = 0$, es decir, examinemos la ecuación de oscilaciones elásticas sin resistencia, en presencia de una fuerza externa periódica:

$$y'' + qy = a \operatorname{sen} \omega t. \qquad (6)$$

La solución general de la ecuación homogénea es:

$$\overline{y} = C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t \quad (\beta^2 = q).$$

Si $\beta \neq \omega$, es decir, si la frecuencia de la fuerza externa no es igual a la frecuencia de las oscilaciones propias la solución particular de la ecuación no homogénea se escribe en la forma:

$$y^* = M \cos \omega t + N \operatorname{sen} \omega t.$$

Poniendo esta expresión en la ecuación de partida, hallamos

$$M = 0, \qquad N = \frac{a}{q - \omega^2}.$$

La solución general es:

$$y = A \operatorname{sen} (\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{q - \omega^2} \operatorname{sen} \omega t.$$

Así, el movimiento se obtiene como resultado de la superposición de las oscilaciones propias de frecuencia $\beta$ y de las oscilaciones forzadas de frecuencia $\omega$.

Si $\beta = \omega$, es decir, la frecuencia de las oscilaciones propias coincide con la frecuencia de la fuerza externa, la función (3) no es solución de la ecuación (6). En este caso, en virtud de los resultados del § 24, busquemos una solución particular de la forma

$$y^* = t\,(M \cos \omega t + N \operatorname{sen} \omega t). \qquad (7)$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación, encontremos $M$ y $N$:

$$M = -\frac{a}{2\omega}; \quad N = 0.$$

Fig. 273

Por tanto:

$$y^* = -\frac{a}{2\beta} t \cos \omega t.$$

La solución general es de la forma:

$$y = A \operatorname{sen} (\beta t + \varphi_0) - \frac{a}{2\omega} t \cos \beta t.$$

El segundo término del segundo miembro muestra que, en este caso, la amplitud de las oscilaciones crece indefinidamente cuando el tiempo $t$ crece de la misma manera ($t \to \infty$). Este fenómeno que tiene lugar cuando la frecuencia de las propias oscilaciones del sistema coincide con la frecuencia de la fuerza externa, se llama *resonancia*.

La gráfica de la función $y^*$ está dada en la figura 273.

## § 29. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Durante la resolución de un gran número de problemas se necesita hallar las funciones $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, . . . $y_n = y_n(x)$, que satisfagan a un sistema de ecuaciones diferenciales bajo la condición de que estas ecuaciones contienen el argumento $x$, las funciones desconocidas $y_1, y_2, \ldots, y_n$ y sus derivadas.

Examinemos el sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

donde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son las funciones desconocidas, y $x$ es el argumento.

Un sistema que tiene en los primeros miembros de las ecuaciones las derivadas de primer orden y en los segundos miembros no las tiene se llama *sistema normal*.

Integrar este sistema significa determinar las funciones $y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_n$, que satisfagan al sistema (1) de ecuaciones y a las condiciones iniciales dadas:

$$(y_1)_{x=x_0}=y_{10},\ (y_2)_{x=x_0}=y_{20},\ \ldots,\ (y_n)_{x=x_0}=y_{n0}. \tag{2}$$

La integración del sistema de la forma (1) se realiza del modo siguiente.

Derivemos la primera de las ecuaciones (1) respecto a $x$:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx}+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

Sustituyendo las derivadas $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$, ... $\frac{dy_n}{dx}$ por sus expresiones respectivas $f_1, f_2, \ldots f_n$ de las ecuaciones (1) obtenemos:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n).$$

Derivando la ecuación obtenida y procediendo de la misma manera hallamos:

$$\frac{d^3y_1}{dx^3}=F_3(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n).$$

Continuando así, obtenemos en definitiva, una ecuación

$$\frac{d^ny_1}{dx^n}=F_n(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n).$$

De este modo hemos obtenido el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n),\\
\dfrac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dfrac{d^ny_1}{dx^n}=F_n(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n).
\end{array}\right\} \tag{3}$$

De las primeras $n-1$ ecuaciones determinemos $y_2$, $y_3 \ldots y_n$, expresándolas en función de $x$, $y_1$ y las derivadas $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{d^2y_1}{dx^2}$, ... ..., $\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$:

$$\left.\begin{array}{l} y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ y_3 = \varphi_3(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = \varphi_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}). \end{array}\right\} \quad (4)$$

Poniendo estas expresiones en la última ecuación del sistema (3), obtenemos una ecuación de $n$ — ésimo orden para hallar $y_1$:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}). \quad (5)$$

Resolviendo esta ecuación, determinemos $y_1$:

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \quad (6)$$

Derivando esta expresión $n-1$ veces hallemos las derivadas $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{d^2y_1}{dx^2}$, ..., $\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ como funciones de $x$, $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$. Sustituyendo estas funciones en (4), determinemos $y_2$, $y_3$, ..., $y_n$:

$$\left.\begin{array}{l} y_2 = \psi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = \psi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{array}\right\} \quad (7)$$

Para que la solución obtenida satisfaga a las condiciones iniciales dadas (2), es suficiente determinar de las ecuaciones (6) y (7) los valores correspondientes de las constantes $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$ (como hemos hecho en el caso de una sola ecuación diferencial).

**Observación 1.** Si el sistema (1) es lineal respecto a las funciones desconocidas, la ecuación (5) será también lineal.

**Ejemplo 1.** Integrar el sistema:

$$\frac{dy}{dx} = y + z + x, \quad \frac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x \quad \text{(a)}$$

con las condiciones iniciales:

$$(y)_{x=0} = 1, \quad (z)_{x=0} = 0. \quad \text{(b)}$$

**Solución:**

1) Derivando la primera ecuación respecto a $x$, tenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}+1.$$

Sustituyendo aquí las expresiones $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dx}$, tomadas de las ecuaciones (a), obtenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(y+z+x)+(-4y-3z+2x)+1$$

ó

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-3y-2z+3x+1. \qquad \text{(c)}$$

2) De la primera ecuación del sistema (a) hallamos:

$$z=\frac{dy}{dx}-y-x \qquad \text{(d)}$$

y, haciendo la sustitución en la ecuación (c), obtenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-3y-2\left(\frac{dy}{dx}-y-x\right)+3x+1$$

ó

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=5x+1. \qquad \text{(e)}$$

La solución general de la última ecuación es:

$$y=(C_1+C_2x)\,e^{-x}+5x-9 \qquad \text{(f)}$$

y en virtud de (d):

$$z=(C_2-2C_1-2C_2x)\,e^{-x}-6x+14. \qquad \text{(g)}$$

Elijamos las constantes $C_1$ y $C_2$ de manera que se satisfagan las condiciones iniciales (b):

$$(y)_{x=0}=1,\quad (z)_{x=0}=0.$$

Entonces de las igualdades (f) y (g) se deduce:

$$1=C_1-9;\quad 0=C_2-2C_1+14,$$

de donde: $C_1=10$; $C_2=6$.

Por consiguiente, la solución que satisface a las ecuaciones iniciales dadas (b) toma la forma:

$$y=(10+6x)\,e^{\ x}+5x-9,\quad z=(-14-12x)\,e^{-x}-6x+14.$$

**Observación (2).** En los razonamientos expuestos hemos supuesto que es posible determinar las funciones $y_2$, $y_3$, ... $y_n$ de las primeras $(n-1)$ ecuaciones del sistema (3). Pero, puede ocurrir que las variables $y_2$, ... $y_n$ se eliminan del número menor que de $n$ ecuaciones. Entonces para determinar $y$ obtenemos una ecuación de orden inferior a $n$.

**Ejemplo 2.** Integrar el sistema:

$$\frac{dx}{dt}=y+z;\quad \frac{dy}{dt}=x+z;\quad \frac{dz}{dt}=x+y.$$

**Solución.** Derivando la primera ecuación respecto a $t$, hallamos:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}=(x+z)+(x+y),\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=2x+y+z.$$

Eliminando las variables $y$ y $z$ de las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt}=y+z;\quad \frac{d^2x}{dt^2}=2x+y+z,$$

obtenemos una ecuación de segundo orden respecto a $x$:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-2x=0.$$

Integrándo esta ecuación obtenemos su solución general:

$$x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t},\tag{$\alpha$}$$

de donde hallamos:

$$\frac{dx}{dt}=-C_1e^{-t}+2C_2e^{2t}\ \text{ y }\ y=\frac{dx}{dt}-z=-C_1e^{-t}+2C_2e^{2t}-z.\tag{$\beta$}$$

Poniendo las expresiones halladas para $x$ e $y$ en la tercera ecuación del sistema dado, obtenemos una ecuación que permite determinar $z$:

$$\frac{dz}{dt}+z=3C_2e^{2t}.$$

Integrando esta ecuación, hallamos

$$z=C_3e^{-t}+C_2e^{2t}.\tag{$\gamma$}$$

Pero, entonces, en virtud de las ecuaciones ($\beta$) obtenemos

$$y=-(C_1+C_3)\,e^{-t}+C_2e^{2t}.\tag{$\delta$}$$

Las ecuaciones ($\alpha$), ($\delta$) y ($\gamma$) dan la solución general del sistema propuesto.

Las ecuaciones diferenciales de un sistema pueden contener las derivadas de órdenes superiores. En este caso se forma el sistema de las ecuaciones diferenciales de órdenes superiores.

Así, por ejemplo, el problema del movimiento de un punto material bajo la acción de la fuerza $\boldsymbol{F}$ se reduce a un sistema de tres ecuaciones diferenciales de segundo orden. Sean $F_x$, $F_y$, $F_z$ las proyecciones de la fuerza $\boldsymbol{F}$ sobre los ejes de coordenadas. La posición del punto en cada instante $t$ se determina por sus coordenadas $x$, $y$, $z$. Por consiguiente, $x$, $y$, $z$, son funciones de $t$. Las proyecciones del vector de la velocidad del punto material sobre los ejes de coordenadas seran:

$$\frac{dx}{dt},\quad \frac{dy}{dt},\quad \frac{dz}{dt}.$$

Supongamos que la fuerza $\boldsymbol{F}$ y, por consiguiente, sus proyecciones $F_x$, $F_y$, $F_z$ dependen del tiempo $t$, las posiciones $x$, $y$, $z$ del punto y de la velocidad de su movimiento, es decir $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

Las funciones buscadas en este problema son:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Estas funciones se determinan a partir de las ecuaciones de la dinámica (ley de Newton):

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Hemos obtenido un sistema de tres ecuaciones diferenciales de segundo orden. Si el movimiento es plano, es decir, si la trayectoria es una curva plana (que yace, por ejemplo, en el plano $0xy$), obtenemos un sistema de dos ecuaciones para determinar las funciones $x(t)$ e $y(t)$:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right), \tag{9}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right). \tag{10}$$

Se puede resolver un sistema de ecuaciones diferenciales de órdenes superiores, reduciéndolo a un sistema de ecuaciones de primer orden. Utilizando, por ejemplo, las ecuaciones (9) y (10), mostremos el método de la resolución. Introduzcamos las designaciones:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v.$$

Entonces:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}.$$

El sistema de dos ecuaciones (9) y (10) de segundo orden con dos funciones $x(t)$ e $y(t)$ desconocidas se sustituye por un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden con cuatro funciones desconocidas $x$, $y$, $u$, $v$:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v,$$

$$m\frac{du}{dt} = F_x(t, x, y, u, v),$$

$$m\frac{dv}{dt} = F_y(t, x, y, u, v).$$

Notemos en conclusión, que este método general para solucionar los sistemas de ecuaciones diferenciales se puede reemplazar, en algunos casos concretos, por uno u otro procedimiento artificial que conduce más rápidamente al objetivo.

**Ejemplo 3.** Hallar la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = z, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = y.$$

**Solución.** Derivemos ambos miembros de la primera ecuación dos veces consecutivas respecto a $x$:

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Pero, $\frac{d^2z}{dx^2}=y$, por consiguiente, obtenemos la ecuación de cuarto orden:

$$\frac{d^4y}{dx^4}=y.$$

Integrando esta ecuación, obtenemos su solución general (véase § 22, ejemplo 4, cap. XIII, tomo II).

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\operatorname{sen} x.$$

Hallando de esta ecuación $\frac{d^2y}{dx^2}$ y sustituyendo esta expresión en la primera ecuación determinamos $z$:

$$z=C_1e^x+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\operatorname{sen} x.$$

## § 30. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \dots\ +a_{1n}x_n,\\ \frac{dx_2}{dt}&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \dots\ +a_{2n}x_n,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{dx_n}{dt}&=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ \dots\ +a_{nn}x_n,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

donde los coeficientes $a_{ij}$ son constantes. Además, $t$ es el argumento; $x_1(t)$, $x_2(t)$, . . ., $x_n(t)$ son las funciones desconocidas. El sistema (1) se llama **sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes.**

Como hemos indicado en el párrafo anterior se puede resolver este sistema, reduciéndolo a una ecuación de orden $n$, la cual, en el caso concreto dado será lineal (véase la observación 1 del párrafo anterior). Sin embargo, se puede resolver el sistema (1) por otro método, sin reducirlo a la ecuación de $n$-ésimo orden. Este método permite analizar, de manera más ilustrativa, el caracter de las soluciones.

Busquemos una solución particular del sistema en la forma siguiente:

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt},\ x_2 = \alpha_2 e^{kt},\ \ldots,\ x_n = \alpha_n e^{kt}. \tag{2}$$

Es preciso determinar las constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y $k$ de modo que las funciones $\alpha_1 e^{kt}, \alpha_2 e^{kt}, \ldots, \alpha_n e^{kt}$ satisfagan el sistema de ecuaciones (1). Sustituyéndolas en el sistema (1), obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} k\alpha_1 e^{kt} &= (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n)\, e^{kt}, \\ k\alpha_2 e^{kt} &= (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n)\, e^{kt}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k\alpha_n e^{kt} &= (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n)\, e^{kt}. \end{aligned}\right\}$$

Simplificamos por $e^{kt}$. Transponiendo todos los términos a un lado y reuniendo los coeficientes de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - k)\,\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n &= 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\,\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - k)\,\alpha_n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Elijamos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y $k$ tales que se satisfaga el sistema (3). Es un sistema de las ecuaciones algebraicas lineales respecto a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Formemos el determinante del sistema (3):

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & (a_{nn} - k) \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Si $k$ es tal que el determinante $\Delta$ se diferencia de cero, el sistema (3) tiene sólo las soluciones nulas: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, y, por tanto, las fórmulas (2) nos dan solamente las soluciones triviales:

$$x_1(t) = x_2(t) = \ldots = x_n(t) \equiv 0.$$

Por consiguiente, obtenemos las soluciones no triviales (2) sólo para tales $k$ que reducen el determinante (4) a cero. Así llegamos a la ecuación de $n$-ésimo orden para determinar $k$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Esta ecuación se llama **ecuación característica** para el sistema (1), y sus raíces se llaman **raíces de la ecuación característica.**

Examinemos algunos casos eventuales:

**I. Las raíces de la ecuación característica son reales y diferentes.** Designamos por $k_1, k_2, \ldots, k_n$ las raíces de la ecuación característica. Escribimos el sistema (3) para cada raíz $k_i$ y determinamos los coeficientes.

$$\alpha_1^{(i)}, \quad \alpha_2^{(i)}, \quad \ldots, \quad \alpha_n^{(i)}.$$

Se puede demostrar que uno de los coeficientes es arbitrario; puede ser igual a 1. De este modo obtenemos:

para la ráiz $k_1$, la solución del sistema (1) es

$$x_1^{(1)}=\alpha_1^{(1)}e^{k_1t}, \quad x_2^{(1)}=\alpha_2^{(1)}e^{k_1t}, \quad \ldots, \quad x_n^{(1)}=\alpha_n^{(1)}e^{k_1t};$$

para la raíz $k_2$, la solución del sistema (1) es

$$x_1^{(2)}=\alpha_1^{(2)}e^{k_2t}, \quad x_2^{(2)}=\alpha_2^{(2)}e^{k_2t}, \quad \ldots, \quad x_n^{(2)}=\alpha_n^{(2)}e^{k_2t};$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

para la raíz $k_n$ la solución del sistema (1) es

$$x_1^{(n)}=\alpha_1^{(n)}e^{k_nt}, \quad x_2^{(n)}=\alpha_2^{(n)}e^{k_nt}, \quad \ldots, \quad x_n^{(n)}=\alpha_n^{(n)}e^{k_nt}.$$

Mediante la sustitución directa en las ecuaciones convencemos de que el sistema de funciones

$$\left.\begin{aligned} x_1&=C_1\alpha_1^{(1)}e^{k_1t}+C_2\alpha_1^{(2)}e^{k_2t}+\ldots+C_n\alpha_1^{(n)}e^{k_nt},\\ x_2&=C_1\alpha_2^{(1)}e^{k_1t}+C_2\alpha_2^{(2)}e^{k_2t}+\ldots+C_n\alpha_2^{(n)}e^{k_nt},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n&=C_1\alpha_n^{(1)}e^{k_1t}+C_2\alpha_n^{(2)}e^{k_2t}+\ldots+C_n\alpha_n^{(n)}e^{k_nt}, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias, también es la solución del sistema de ecuaciones diferenciales (1). Esta es la **solución general del sistema** (1).

Es fácil demostrar que se puede hallar tales valores de las constantes para los cuales la solución satisfaga a las condiciones iniciales dadas.

**Ejemplo 1.** Hallar la solución general del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_1}{dt}=2x_1+2x_2, \quad \frac{dx_2}{dt}=x_1+3x_2.$$

**Solución.** Formemos la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix}=0,$$

ó $k^2-5k+4=0$. Hallamos sus raíces:

$$k_1=1, \quad k_2=4.$$

Buscamos la solución del sistema en la forma:

$$x_1^{(1)}=\alpha_1^{(1)}e^t, \qquad x_2^{(1)}=\alpha_2^{(1)}e^t$$

y

$$x_1^{(2)}=\alpha_1^{(2)}e^{4t}, \qquad x_2^{(2)}=\alpha_2^{(2)}e^{4t}.$$

Formemos el sistema (3) para la raíz $k_1=1$ y determinemos $\alpha_1^{(1)}$ y $\alpha_2^{(1)}$:

$$\left.\begin{array}{l}(2-1)\,\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0,\\ 1\alpha_1^{(1)}+(3-1)\,\alpha_2^{(1)}=0\end{array}\right\}$$

ó

$$\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0,$$
$$\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0,$$

de donde: $\alpha_2^{(1)}=-\frac{1}{2}\alpha_1^{(1)}$. Poniendo $\alpha_1^{(1)}=1$, obtenemos: $\alpha_2^{(1)}=-\frac{1}{2}$. Así hemos obtenido la solución del sistema:

$$x_1^{(1)}=e^t, \quad x_2^{(1)}=-\frac{1}{2}e^t.$$

Formemos, ahora, el sistema (3) para la raíz $k_2=4$ y determinemos $\alpha_1^{(2)}$ y $\alpha_2^{(2)}$:

$$-2\alpha_1^{(2)}+2\alpha_2^{(2)}=0,$$
$$\alpha_1^{(2)}-2\alpha_2^{(2)}=0,$$

de donde: $\alpha_1^{(2)}=\alpha_2^{(2)}$ y $\alpha_1^{(2)}=1$, $\alpha_2^{(2)}=1$. Obtenemos pues, la segunda solución del sistema:

$$x_1^{(2)}=e^{4t}, \quad x_2^{(2)}=e^{4t}.$$

La solución general del sistema será [véase (6)]:

$$x_1=C_1e^t+C_2e^{4t},$$
$$x_2=-\frac{1}{2}C_1e^t+C_2e^{4t}.$$

**II. Las raíces de la ecuación característica son distintas, pero incluyen raíces complejas.** Supongamos que entre las raíces de la ecuación característica hay dos raíces complejas conjugadas:

$$k_1=\alpha+i\beta, \qquad k_2=\alpha-i\beta.$$

A estas raíces corresponden las soluciones:

$$x_j^{(1)}=\alpha_j^{(1)}e^{(\alpha+i\beta)t} \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{7}$$
$$x_j^{(2)}=\alpha_j^{(2)}e^{(\alpha-i\beta)t} \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{8}$$

Los coeficientes $\alpha_j^{(1)}$ y $\alpha_j^{(2)}$ se determinan del sistema de ecuaciones (3).

Igual que en § 21 (cap. XIII), se puede mostrar que las partes real e imaginaria de la solución compleja son también soluciones. De esta manera obtenemos dos soluciones particulares:

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}_j^{(1)} &= e^{\alpha t}(\lambda_j^{(1)}\cos\beta x + \lambda_j^{(2)}\operatorname{sen}\beta x),\\ \bar{x}_j^{(2)} &= e^{\alpha t}(\bar{\lambda}_j^{(1)}\operatorname{sen}\beta x + \bar{\lambda}_j^{(2)}\cos\beta x),\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

donde $\lambda_j^{(1)}$, $\lambda_j^{(2)}$, $\overline{\lambda}_j^{(1)}$, $\overline{\lambda}_j^{(2)}$ son números reales, determinados mediante $\alpha_j^{(1)}$ y $\alpha_j^{(2)}$.

Las combinaciones correspondientes de las funciones (9) entran en la solución general del sistema.

**Ejemplo 2.** Hallar la solución general del sistema

$$\frac{dx_1}{dt} = -7x_1 + x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 5x_2.$$

**Solución.** Formemos la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} -7-k & 1 \\ -2 & -5-k \end{vmatrix} = 0$$

ó $k^2 + 12k + 37 = 0$ y encontremos sus raíces:

$$k_1 = -6 + i, \quad k_2 = -6 - i.$$

Sustituyendo $k_1 = -6 + i$ en el sistema (3), hallamos:

$$\alpha_1^{(1)} = 1, \quad \alpha_2^{(1)} = 1 + i.$$

Escribimos la solución (7):

$$x_1^{(1)} = 1e^{(-6+i)t}, \quad x_2^{(1)} = (1+i)\,e^{(-6+i)t}. \tag{7'}$$

Sustituyendo $k_2 = -6 - i$ en el sistema (3), hallamos:

$$\alpha_1^{(2)} = 1, \quad \alpha_2^{(2)} = 1 - i.$$

Obtengamos el segundo sistema de las soluciones (8):

$$x_1^{(2)} = e^{(-6-i)t}, \quad x_2^{(2)} = (1-i)\,e^{(-6-i)t}. \tag{8'}$$

Escribimos en otra forma la solución (7′):

$$x_1^{(1)} = e^{-6t}(\cos t + i\operatorname{sen} t), \quad x_2^{(1)} = (1+i)\,e^{-6t}(\cos t + i\operatorname{sen} t)$$

ó

$$x_1^{(1)} = e^{-6t}\cos t + ie^{-6t}\operatorname{sen} t,$$

$$x_2^{(1)} = e^{-6t}(\cos t - \operatorname{sen} t) + ie^{-6t}(\cos t + \operatorname{sen} t).$$

Escribimos en otra forma la solución (8′):

$$x_1^{(2)} = e^{-6t}\cos t - ie^{-6t}\operatorname{sen} t,$$

$$x_2^{(2)} = e^{-6t}(\cos t - \operatorname{sen} t) - ie^{-6t}(\cos t + \operatorname{sen} t).$$

Como los sistemas de las soluciones particulares podemos tomar las partes reales e imaginarias por separado

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_1^{(1)} &= e^{-6t}\cos t, & \bar{x}_2^{(1)} &= e^{-6t}(\cos t - \operatorname{sen} t),\\ \bar{x}_1^{(2)} &= e^{-6t}\operatorname{sen} t, & \bar{x}_2^{(2)} &= e^{-6t}(\cos t + \operatorname{sen} t). \end{aligned}\right\} \qquad (9')$$

La solución general del sistema es:

$$x_1 = C_1 e^{-6t}\cos t + C_2 e^{-6t}\operatorname{sen} t,$$
$$x_2 = C_1 e^{-6t}(\cos t - \operatorname{sen} t) + C_2 e^{-6t}(\cos t + \operatorname{sen} t).$$

De modo análogo se puede hallar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales de órdenes superiores con coeficientes constantes.

En la mecánica y la teoría de circuitos eléctricos se estudia, por ejemplo, la solución del sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= a_{11}x + a_{12}y,\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= a_{21}x + a_{22}y. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Luego buscamos la solución en la forma:

$$x = \alpha e^{kt}, \qquad y = \beta e^{kt}.$$

Introduciendo estas expresiones en el sistema (10) y simplificando por $e^{kt}$, obtenemos un sistema de ecuaciones para determinar $\alpha$, $\beta$ y $k$:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - k^2)\,\alpha + a_{12}\beta &= 0,\\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k^2)\,\beta &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Siendo $\alpha$ y $\beta$ distintas de cero, se determinan solamente cuando el determinante del sistema es igual a cero:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k^2 & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} - k^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (12)$$

Esta es la ecuación característica para el sistema (10). Es la ecuación de cuarto orden respecto a $k$. Sean $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$ sus raíces (supongamos que las raíces son diferentes). Para cada raíz $k_i$ del sistema (11) hallamos los valores de $\alpha$ y $\beta$. Igual que en el caso (6) la solución general tiene la forma:

$$x = C_1\alpha^{(1)}e^{k_1t} + C_2\alpha^{(2)}e^{k_2t} + C_3\alpha^{(3)}e^{k_3t} + C_4\alpha^{(4)}e^{k_4t},$$
$$y = C_1\beta^{(1)}e^{k_1t} + C_2\beta^{(2)}e^{k_2t} + C_3\beta^{(3)}e^{k_3t} + C_4\beta^{(4)}e^{k_4t}.$$

Si entre las raíces hay unas complejas, a cada par de raíces complejas en la solución general corresponden las expresiones de la forma (9).

**Ejemplo 3.** Hallar la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2x}{dt^2}=x-4y, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-x+y.$$

**Solución.** Escribamos la ecuación característica (12) y encontremos sus raíces:

$$\begin{vmatrix} 1-k^2 & -4 \\ -1 & 1-k^2 \end{vmatrix}=0,$$

$$k_1=i, \quad k_2=-i, \quad k_3=\sqrt{3}, \quad k_4=-\sqrt{3}.$$

Buscamos la solución en la forma:

$$x^{(1)}=\alpha^{(1)}e^{it}, \qquad y^{(1)}=\beta^{(1)}e^{it},$$
$$x^{(2)}=\alpha^{(2)}e^{-it}, \qquad y^{(2)}=\beta^{(2)}e^{-it},$$
$$x^{(3)}=\alpha^{(3)}e^{\sqrt{3}t}, \qquad y^{(3)}=\beta^{(3)}e^{\sqrt{3}t},$$
$$x^{(4)}=\alpha^{(4)}e^{-\sqrt{3}t}, \qquad y^{(4)}=\beta^{(4)}e^{-\sqrt{3}t}.$$

Del sistema (11) encontramos $\alpha^{(j)}$ y $\beta^{(j)}$:

$$\alpha^{(1)}=1, \qquad \beta^{(1)}=\frac{1}{2},$$
$$\alpha^{(2)}=1, \qquad \beta^{(2)}=\frac{1}{2},$$
$$\alpha^{(3)}=1, \qquad \beta^{(3)}=-\frac{1}{2},$$
$$\alpha^{(4)}=1, \qquad \beta^{(4)}=-\frac{1}{2}.$$

Escribimos las soluciones complejas:

$$x^{(1)}=e^{-it}=\cos t+i\,\mathrm{sen}\,t, \qquad y^{(1)}=\frac{1}{2}(\cos t+i\,\mathrm{sen}\,t),$$
$$x^{(2)}=e^{-it}=\cos t-i\,\mathrm{sen}\,t, \qquad y^{(2)}=\frac{1}{2}(\cos t-i\,\mathrm{sen}\,t).$$

Las partes real e imaginaria, tomadas por separado forman las soluciones:

$$\bar{x}^{(1)}=\cos t, \qquad \bar{y}^{(1)}=\frac{1}{2}\cos t,$$
$$\bar{x}^{(2)}=\mathrm{sen}\,t, \qquad \bar{y}^{(2)}=\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,t.$$

Escribimos, ahora, la solución general:

$$x=C_1\cos t+C_2\,\mathrm{sen}\,t+C_3e^{\sqrt{3}t}+C_4e^{-\sqrt{3}t},$$
$$y=C_1\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}C_2\,\mathrm{sen}\,t-C_3\frac{1}{2}e^{\sqrt{3}t}-C_4\frac{1}{2}e^{-\sqrt{3}t}.$$

**Observación.** No hemos analizado aquí el caso de raíces múltiples de la ecuación característica que está fuera de las tareas del libro presente.

## § 31. NOCION SOBRE LA TEORIA DE LA ESTABILIDAD DE LIAPUNOV

Como las soluciones de la mayoría de las ecuaciones diferenciales y de los sistemas de ecuaciones no se expresan mediante funciones elementales o cuadraturas, en estos casos, para resolver las ecuaciones diferenciales concretas, se usan los métodos de integración aproximada. Ya hemos dado algunas nociones de estos métodos en el § 3 (capítulo XIII tomo II); otros métodos los analizaremos en los §§ 32-34 y también en el capítulo XVI.

La deficiencia de estos métodos es que ellos dan sólo una solución particular; para obtener otras soluciones particulares es preciso realizar de nuevo todos los cálculos. Conociendo una solución particular, no se puede juzgar sobre el carácter de las otras soluciones.

En muchos problemas de mecánica y técnica tiene importancia saber no los valores concretos de la solución correspondientes a los valores concretos dados del argumento, sino el carácter de variación de la solución cuando cambia el argumento y, en particular, cuando éste crece indefinidamente. Por ejemplo, tiene importancia saber, si las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas son periódicas, o si ellas tiendèn asintóticamente hacia una función conocida, etc. Estos problemas son de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales.

La cuestión de la estabilidad de una solución o de un movimiento es uno de los problemas fundamentales de la teoría cualitativa; este problema fue detalladamente analizado por el célebre matemático ruso A. M. Liapunov (1857-1918).

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(t,\ x,\ y), \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(t,\ x,\ y). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Sean $x = x(t)$ e $y = y(t)$ las soluciones de este sistema que satisfagan las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{aligned} x_{t=0} &= x_0, \\ y_{t=0} &= y_0. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Sean, además, $\bar{x} = \bar{x}(t)$ e $\bar{y} = \bar{y}(t)$ las soluciones del sistema (1) que satisfagan a las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}_{t=0} = \bar{x}_0, \\ \bar{y}_{t=0} = \bar{y}_0. \end{array}\right\} \qquad (1'')$$

**Definición.** Las soluciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$, que satisfagan las ecuaciones (1) y las condiciones iniciales (1'), se llaman *estables*, según Liapunov, cuando $t \to \infty$, si para todo $\varepsilon > 0$, por pequeño que sea, existe $\delta > 0$ tal que para todos los valores de $t > 0$ se verificarán las desigualdades

$$\left.\begin{array}{l} |\bar{x}(t) - x(t)| < \varepsilon, \\ |\bar{y}(t) - y(t)| < \varepsilon, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

si las condiciones iniciales satisfacen las desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l} |\bar{x}_0 - x_0| < \delta, \\ |\bar{y}_0 - y_0| < \delta. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Aclaremos el significado de esta definición. De las desigualdades (2) y (3) se deduce que, si son pequeñas las variaciones de las condiciones iniciales, las soluciones correspondientes varían poco, cualesquiera que sean los valores positivos de $t$. Si el sistema de ecuaciones diferenciales describe cierto movimiento, entonces, siendo estables las soluciones, el carácter de movimiento varía poco cuando los cambios de las condiciones iniciales son pequeños.

Analicemos esto en el ejemplo de una ecuación de primer orden. Sea la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = -y + 1. \qquad (a)$$

Su solución general es la función

$$y = Ce^{-t} + 1. \qquad (b)$$

Hallemos la solución particular que satisface a la condición inicial

$$y_{t=0} = 1. \qquad (c)$$

Es evidente que esta solución, $y = 1$, se obtiene cuando $C = 0$ (fig. 274). Encontremos, ahora, la solución particular que satisfaga la condición inicial

$$\bar{y}_{t=0} = \bar{y}_0.$$

De la ecuación (b) hallemos el valor de $C$:

$$\bar{y}_0 = C + 1,$$

de donde:

$$C = \bar{y}_0 - 1.$$

Sustituyendo este valor de $C$ en la ecuación (b), obtenemos:

$$\bar{y} = (\bar{y}_0 - 1)\, e^{-t} + 1.$$

Es evidente que la solución $y = 1$ es estable. En efecto,

$$y - \bar{y} = [(\bar{y}_0 - 1)\, e^{-t} + 1] - 1 = (\bar{y}_0 - 1)\, e^{-t} \longrightarrow 0$$

cuando $t \longrightarrow \infty$.

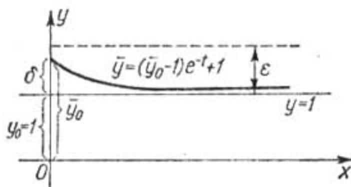



*Fig. 274*

Por consiguiente, la desigualdad (3) se verifica para $\varepsilon$ cualquiera, siempre cuando se cumple la desigualdad

$$(y_0 - 1) = \delta < \varepsilon.$$

Examinemos luego el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

suponiendo que los coeficientes $a$, $b$, $c$, $g$ son constantes y $g \neq 0$.

Aclaremos a qué condiciones deben satisfacer los coeficientes para que la solución $x = 0$, $y = 0$, del sistema (4) sea estable.

Derivando la ecuación primera y eliminando $y$, obtenemos una ecuación de segundo orden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = c\,\frac{dx}{dt} + g\,\frac{dy}{dt} = c\,\frac{dx}{dt} + g\,(ax + by) =$$

$$= c\,\frac{dx}{dt} + agx + b\left(\frac{dx}{dt} - cx\right)$$

ó

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (b + c)\,\frac{dx}{dt} - (ag - bc)\,x = 0. \tag{5}$$

Su ecuación característica tiene la forma:

$$\lambda^2 - (b + c)\lambda - (ag - bc) = 0. \tag{6}$$

Designemos las raíces de la ecuación característica por $\lambda_1$ y $\lambda_2$. Son posibles los casos siguientes.

1. Las raíces de la ecuación característica son reales, negativas y distintas:

$$\lambda_1 < 0, \ \lambda_2 < 0, \ \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Entonces,

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

$$y = [C_1(\lambda_1 - c)e^{\lambda_1 t} + C_2(\lambda_2 - c)e^{\lambda_2 t}]\frac{1}{g}.$$

La solución que satisface a las condiciones iniciales

$$x|_{t=0} = x_0, \quad y|_{t=0} = y_0,$$

es:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0\lambda_1 - cx_0 - y_0 g}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t}, \\ y &= \frac{1}{g}\left[\frac{cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 - c)e^{\lambda_1 t} + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{x_0\lambda_1 - cx_0 - y_0 g}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_2 - c)e^{\lambda_2 t}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

De las últimas fórmulas se deduce que para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede elegir $x_0$ e $y_0$ suficientemente pequeños de modo que para todos $t > 0$ tenemos:

$$|x(t)| < \varepsilon, \ |y(t)| < \varepsilon, \text{ puesto que } e^{\lambda_1 t} < 1 \text{ y } e^{\lambda_2 t} < 1.$$

Por tanto, en este caso la solución $x = 0$, $y = 0$ es **estable**.

2. Sean $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$. En este caso:

$$x = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

$$y = \frac{1}{g}[C_2(\lambda_2 - c)e^{\lambda_2 t} - cC_1],$$

y, como en el caso anterior, la solución es **estable**.

3. Sea $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. En este caso:

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda_1 t},$$

$$y = \frac{1}{g}e^{\lambda_1 t}[C_1(\lambda_1 - c) + C_2(1 + \lambda_1 t - ct)].$$

Puesto que

$$te^{\lambda_1 t} \to 0, \quad e^{\lambda_1 t} \to 0, \quad \text{cuando } t \to \infty,$$

entonces, para $C_1$ y $C_2$ suficientemente pequeñas (es decir, cuando $x_0$ e $y_0$ son suficientemente pequeños) será:

$$|x(t)| < \varepsilon \text{ e } |y(t)| < \varepsilon \text{ para cualquier } t > 0.$$

La solución es **estable.**

4. Sea $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. En este caso tenemos:

$$x = C_1 + C_2 t,$$

$$y = \frac{1}{g}[-cC_1 + C_2 - cC_2 t].$$

Vemos que por pequeña que sea $C_2 \neq 0$, tanto $x$, como $y$ tienden al infinito (cuando $t \to \infty$), es decir, la solución es **inestable.**

5. Supongamos que por lo menos una de las raíces $\lambda_1$ y $\lambda_2$ sea positiva, por ejemplo, $\lambda_1 > 0$.

De la fórmula (7) se deduce que, por pequeños que sean $x^0$ e $y_0$, si

$$cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2 \neq 0,$$

es decir, si $C_1 \neq 0$, entonces $|x(t)| \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

Por tanto, en este caso la solución también es **inestable.**

6. Las raíces de la ecuación característica son complejas con la parte real negativa:

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1 = \alpha + i\beta \\ \lambda_2 = \alpha - i\beta\end{matrix}\right\} \alpha < 0.$$

En este caso:

$$\left.\begin{aligned} x &= Ce^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t + \delta), \\ y &= \frac{1}{g}Ce^{\alpha t}[(\alpha - c)\operatorname{sen}(\beta t + \delta) + \beta\cos(\beta t + \delta)]. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Es evidente que para todo $\varepsilon > 0$ se puede elegir $x_0$ e $y_0$ de tal modo que sea $|C| < \varepsilon$ y $\frac{|\alpha - c| + |\beta|}{|d|} < \varepsilon$, y, por consiguiente,

$$|x(t)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |y(t)| < \varepsilon.$$

La solución es **estable.**

7. Las raíces de la ecuación característica son números puramente imaginarios:

$$\lambda_1 = \beta t, \ \lambda_2 = -\beta t.$$

En este caso:

$$x = C \operatorname{sen}(\beta t + \delta),$$

$$y = \frac{1}{g} C [\beta \cos(\beta t + \delta) - c \operatorname{sen}(\beta t + \delta)],$$

es decir, $x(t)$ e $y(t)$ son funciones periódicas de $t$. Como en el caso anterior verifiquemos que la solución es **estable**.

8. Las raíces de la ecuación característica son complejas con la parte real positiva ($\alpha > 0$).

De las fórmulas (8) se deduce que por pequeños que sean $x_0$ e $y_0$ (es decir, por pequeñas que sean $C \neq 0$), las magnitudes $|x(t)|$ e $|y(t)|$ pueden tomar los valores grandes cualesquiera que sean, cuando $t$ crece, puesto que $e^{\alpha t} \to \infty$ cuando $t \to \infty$. La solución es **inestable**.

Para dar un criterio general de la estabilidad de la solución del sistema (4), procedamos de la manera siguiente.

Escribamos las raíces de la ecuación característica en forma de los números complejos:

$$\lambda_1 = \lambda_1^* + i\lambda_1^{**}, \quad \lambda_2 = \lambda_2^* + i\lambda_2^{**}$$

(si las raíces son reales, $\lambda_1^{**} = 0$ y $\lambda_2^{**} = 0$).

Representemos las raíces de la ecuación característica mediante los puntos en el plano de la variable compleja $\lambda^*\lambda^{**}$. Entonces, partiendo de los ocho casos examinados, se puede formular la condición de estabilidad de la solución del sistema (4) en la forma siguiente:

*Si ninguna de las raíces $\lambda_1$, $\lambda_2$ de la ecuación característica (6) se encuentra a la derecha del eje imaginario y si por lo menos una de las raíces es distinta de cero, la solución es estable; si ambas raíces son nulas o por lo menos una de las raíces está a la derecha del eje imaginario, la solución es inestable.*

Examinemos ahora el sistema más general de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy + P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by + Q(x, y). \end{aligned}\right\} \qquad (4')$$

Aparte de los casos excepcionales, la solución de tal sistema no se expresa mediante las funciones elementales y las cuadraturas.

Para determinar que las soluciones de este sistema son estables o inestables, las comparan con las soluciones de un sistema lineal. Supongamos que cuando $x \to 0$ e $y \to 0$, las funciones $P(x, y)$

y $Q(x, y)$ también tienden a cero con mayor rapidez que $\rho$, donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; en otras palabras

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{P(x, y)}{\rho} = 0; \qquad \lim_{\rho \to 0} \frac{Q(x, y)}{\rho} = 0.$$

Entonces se puede demostrar que aparte de un caso excepcional, la solución del sistema (4′) es estable siempre y cuando lo es la solución del sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

y es inestable siempre y cuando es inestable la solución del sistema (4). La excepción es el caso, en que ambas raíces de la ecuación característica se encuentran en el eje imaginario. Entonces es mucho más difícil resolver el problema de la estabilidad o inestabilidad de la solución del sistema (4′).

A. M. Liapunov *) analizó el problema de la estabilidad de las soluciones de los sistemas de ecuaciones partiendo de las suposiciones bastante generales respecto a la forma de estas ecuaciones.

## § 32. SOLUCION APROXIMADA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN POR EL MÉTODO DE EULER

Examinemos aquí dos métodos de solución numérica de la ecuación diferencial de primer orden. En este párrafo analicemos el **método de Euler.**

Hallemos la solución aproximada de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

en el segmento $[x_0, b]$ que satisfaga la condición inicial: $y = y_0$ para $x = x_0$. Dividamos el segmento $[x_0, b]$ mediante los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ en $n$ partes iguales (aquí, $x_0 < x_1 < x_2, \ldots$ $\ldots, < x_n$). Designemos: $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = b - x_{n-1} = \Delta x = h$, por tanto,

$$h = \frac{b - x_0}{n}$$

*) A. M. Liapunov. «Problema general de la estabilidad de movimiento», 1935.

Sea $y = \varphi(x)$ cierta solución aproximada de la ecuación (1), y

$$y_0 = \varphi(x),\ y_1 = \varphi(x_1),\ \ldots,\ y_n = \varphi(x_n).$$

Designemos:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,\quad \Delta y_1 = y_2 - y_1,\ \ldots,\ \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

En cada uno de los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en la ecuación (1) sustituyamos la derivada por la razón de diferencias finitas:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y), \tag{2}$$

$$\Delta y = f(x, y)\,\Delta x. \tag{2'}$$

Cuando $x = x_0$ tenemos:

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x} = f(x_0, y_0), \qquad \Delta y_0 = f(x_0, y_0)\,\Delta x$$

ó

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)\,h.$$

En esta igualdad $x_0$, $y_0$, $h$ son conocidos. Por tanto, hallamos:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)\,h.$$

Cuando $x = x_1$ la ecuación (2') toma la forma:

$$\Delta y_1 = f(x_1, y_1)\,h$$

ó

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)\,h,\ y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\,h.$$

Aquí tenemos conocidos $x_1$, $y_1$, $h$ y determinamos $y_2$. De modo análogo encontramos:

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)\,h,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)\,h,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\,h.$$

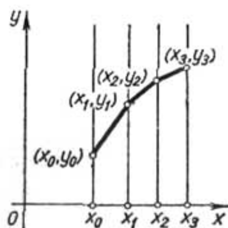


Fig. 275

Pues hemos hallado los valores aproximados de la solución en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Uniendo en el plano de coordenadas los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ mediante los segmentos de recta obtenemos una **línea quebrada** que es la representación aproximada de la línea integral (fig. 275). Esta línea se llama *línea quebrada de Euler*.

**Observación.** Designemos por $y = \varphi_h(x)$ la solución aproximada de la ecuación (1) que corresponde a la línea quebrada de Euler

cuando $\Delta x = h$. Se puede demostrar que, si existe una solución única $y = \varphi^* (x)$ de la ecuación (1) que satisface a las condiciones iniciales y está definida en el segmento $[x_0, b]$, entonces $\lim\limits_{h \to 0} | \varphi_h (x) - \varphi^* (x) | = 0$ para todo $x$ del segmento $[x_0, b]$.

**Ejemplo.** Hallar el valor aproximado de la solución de la ecuación

$$y' = y + x,$$

para $x = 1$, que satisfaga a la condición inicial: $y_0 = 1$, cuando $x_0 = 0$.

**Solución.** Dividamos el segmento $[0, 1]$ en 10 partes mediante los puntos $x_0 = 0$; 0,1; 0,2; . . .; 1,0. Por tanto, $h = 0,1$. Determinemos los valores $y_1, y_2, \ldots, y_n$ por la fórmula (2'):

$$\Delta y_k = (y_k + x_k) h$$

ó

$$y_{k+1} = y_k + (y_k + x_k) h.$$

De este modo obtenemos:

$$y_1 = 1 + (1 + 0) \cdot 0,1 = 1 + 0,1 = 1,1,$$
$$y_2 = 1,1 + (1,1 + 0,1) \cdot 0,1 = 1,21,$$
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Durante la solución formemos la tabla:

| $x_k$ | $y_k$ | $y_k + x_k$ | $\Delta y_k = (y_k + x_k) h$ |
|---|---|---|---|
| $x_0 = 0$ | 1,000 | 1,000 | 0,100 |
| $x_1 = 0,1$ | 1,100 | 1,200 | 0,120 |
| $x_2 = 0,2$ | 1,220 | 1,420 | 0,142 |
| $x_3 = 0,3$ | 1,362 | 1,620 | 0,162 |
| $x_4 = 0,4$ | 1,524 | 1,924 | 0,1924 |
| $x_5 = 0,5$ | 1,7164 | 2,2164 | 0,2216 |
| $x_6 = 0,6$ | 1,9380 | 2,5380 | 0,2538 |
| $x_7 = 0,7$ | 2,1918 | 2,8918 | 0,2812 |
| $x_8 = 0,8$ | 2,4730 | 3,2730 | 0,3273 |
| $x_9 = 0,9$ | 2,8003 | 3,7003 | 0,3700 |
| $x_{10} = 1,0$ | 3,1703 | | |

Hemos encontrado el valor aproximado $y|_{x=1} = 3,1703$. La solución precisa de la ecuación dada, que satisface las condiciones iniciales indicadas es:

$$y = 2e^x - x - 1.$$

Por consiguiente,

$$y|_{x=1} = 2(e - 1) = 3,4365.$$

El error absoluto es 0,2662, el error relativo es $\frac{0,2662}{3,4365} = 0,077 \approx 8\%$.

## § 33. SOLUCION APROXIMADA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES POR EL METODO DE DIFERENCIAS, BASADO EN EL EMPLEO DE LA FFRMULA DE TAYLOR. METODO DE ADAMS

Busquemos de nuevo la solución de la ecuación

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

en el segmento $[x_0, b]$ que satisface a la condición inicial: $y = y_0$, cuando $x = x_0$. Introduzcamos las designaciones necesarias para lo sucesivo. Los valores aproximados de la solución en los puntos

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$$

serán

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Las primeras diferencias o las de primer orden son:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \ \ldots, \quad y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

Las segundas diferencias o las de segundo orden son:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0,$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}.$$

Las diferencias de las segundas diferencias se llaman diferencias de tercer orden, etc. Designemos los valores aproximados de las derivadas mediante $y'_0, y'_1, \ldots, y'_n$; los valores aproximados de las segundas derivadas, mediante $y''_0, y''_1, \ldots, y''_n$, etc. De modo análogo determinemos las primeras diferencias de las derivadas:

$$\Delta y'_0 = y'_1 - y'_0, \ \Delta y'_1 = y'_2 - y'_1, \ \ldots, \ \Delta y'_{n-1} = y'_n - y'_{n-1};$$

las segundas diferencias de las derivadas:

$$\Delta^2 y'_0 = \Delta y'_1 - \Delta y'_0, \ \Delta^2 y'_1 = \Delta y'_2 - \Delta y'_1, \ \ldots, \Delta^2 y'_{n-2} = \Delta y'_{n-1} - \Delta y'_{n-2}$$

etc.

Escribamos, ahora la fórmula de Taylor para solucionar la ecuación en la vecindad del punto $x = x_0$ (tomo I, cap. IV, § 6, fórmula (6)):

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1} y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} y''_0 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x - x_0)^m}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m} y_0^{(m)} + R_m. \tag{2}$$

En esta fórmula $y_0$ está conocido y los valores de las derivadas $y'_0$, $y''_0$, . . . determinamos de la ecuación (1) del modo siguiente. Sustituyendo los valores iniciales $x_0$ e $y_0$ en el segundo miembro de la ecuación (1), hallamos $y'_0$:

$$y'_0 = f(x_0, y_0).$$

Derivando los términos de la ecuación (1) respecto a $x$, obtenemos:

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'. \tag{3}$$

Introduciendo en el segundo miembro los valores de $x_0$, $y_0$, $y'_0$, hallamos:

$$y''_0 = \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right)_{x=x_0,\ y=y_0;\ y'=y'_0}.$$

Derivando una vez más la igualdad (3) respecto a $x$ y sustituyendo los valores de $x_0$, $y_0$, $y'_0$, $y''_0$, encontramos $y'''_0$. Continuando de esta manera*), podemos hallar los valores de las derivadas de **cualquier orden** para $x = x_0$. En el segundo miembro de la fórmula (2) son conocidos todos los términos a excepción del término complementario $R_m$. De este modo, menospreciando el término complementario, podemos obtener los valores aproximados de la solución para cualquier valor de $x$; la precisión de los mismos depende de la magnitud $|x - x_0|$ y del número de los términos del desarrollo.

En el método dado abajo, determinemos por la fórmula (2) sólo unos cuantos primeros valores de $y$, cuando $|x - x_0|$ es pequeño. Determinemos los valores de $y_1$ e $y_2$ para $x_1 = x_0 + h$ y para $x_2 = x_0 + 2h$, tomando **cuatro** términos del desarrollo ($y_0$ está conocido de las condiciones iniciales):

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1} y'_0 + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y''_0 + \frac{h^3}{3!} y'''_0, \tag{4}$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1} y'_0 + \frac{(2h)^2}{1 \cdot 2} y''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} y'''_0. \tag{4'}$$

Consideremos, pues, que son conocidos tres valores**) de la función: $y_0$, $y_1$, $y_2$. Basándonos en estos valores y utilizando la ecuación (1), determinamos:

$$y'_0 = f(x_0, y_0), \quad y'_1 = f(x_1, y_1), \quad y'_2 = f(x_2, y_2).$$

*) En adelante supongamos que la función $f(x, y)$ es tantas veces derivable respecto a $x$ e $y$, cuantas veces sea necesario en nuestros razonamientos.

**) Si tratamos de encontrar la solución con mayor exactitud, necesitamos calcular más que los primeros tres valores de $y$.

Conociendo $y'_0$, $y'_1$, $y'_2$, podemos determinar $\Delta y'_0$, $\Delta y'_1$, $\Delta^2 y'_0$. Los resultados del cálculo anotemos en la tabla:

| $x$ | $y$ | $y'$ | $\Delta y'$ | $\Delta^2 y'$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $y_0$ | $y'_0$ | | |
| | | | $\Delta y'_0$ | |
| $x_1 = x_0 + h$ | $y_1$ | $y'_1$ | | $\Delta^2 y'_0$ |
| | | | $\Delta y'_1$ | |
| $x_2 = x_0 + 2h$ | $y_2$ | $y'_2$ | | |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| $x_{k-2} = x_0 + (k-2) h$ | $y_{k-2}$ | $y'_{k-2}$ | | |
| | | | $\Delta y'_{k-2}$ | |
| $x_{k-1} = x_0 + (k-1) h$ | $y_{k-1}$ | $y'_{k-1}$ | | $\Delta^2 y'_{k-2}$ |
| | | | $\Delta y'_{k-1}$ | |
| $x_k = x_0 + kh$ | $y_k$ | $y'_k$ | | |

Supongamos, ahora, que conocemos los valores de la solución

$$y_0, \; y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_k.$$

A base de estos valores, utilizando la ecuación (1), podemos calcular los valores de las derivadas

$$y'_0, \; y'_1, \; y'_2, \; \ldots, \; y'_k,$$

y, por consiguiente,

$$\Delta y'_0, \; \Delta y'_1, \; \ldots, \; \Delta y'_{k-1}$$

y

$$\Delta^2 y'_0, \; \Delta^2 y'_1, \; \ldots, \; \Delta^2 y'_{k-2}.$$

Determinemos el valor de $y_{k+1}$ por la fórmula de Taylor, haciendo

$$a = x_k,\ x = x_{k+1} = x_k + h:$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h^2}{1\cdot 2} y''_k + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} y'''_k + \ldots + \frac{h^m}{m!} y_k^{(m)} + R_m.$$

Limitemos en nuestro caso con cuatro términos del desarrollo:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h^2}{1\cdot 2} y''_k + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} y'''_k. \tag{5}$$

En esta fórmula $y''_k$ e $y'''_k$ son desconocidos. Tratemos de hallarlos mediante las diferencias conocidas de primer y segundo órdenes.

Presentemos previamente $y'_{k-1}$ por la fórmula de Taylor, haciendo $a = x_k$, $x - a = -h$:

$$y'_{k-1} = y'_k + \frac{(-h)}{1} y''_k + \frac{(-h)^2}{1\cdot 2} y'''_k, \tag{6}$$

e $y'_{k-2}$, haciendo $a = x_k$, $x - a = -2h$:

$$y'_{k-2} = y'_k + \frac{(-2h)}{1} y''_k + \frac{(-2h)^2}{1\cdot 2} y'''_k. \tag{7}$$

De la igualdad (6) hallamos:

$$y'_k - y'_{k-1} = \Delta y'_{k-1} = \frac{h}{1} y''_k - \frac{h^2}{1\cdot 2} y'''_k. \tag{8}$$

Restando de los términos de la igualdad (6) los de la igualdad (7), obtenemos:

$$y'_{k-1} - y'_{k-2} = \Delta y'_{k-2} = \frac{h}{1} y''_k - \frac{3h^2}{2} y'''_k. \tag{9}$$

De las (8) y (9) hallamos:

$$\Delta y'_{k-1} - \Delta y'_{k-2} = \Delta^2 y'_{k-2} = h^2 y'''_k,$$

ó

$$y'''_k = \frac{1}{h^2} \Delta^2 y'_{k-1}. \tag{10}$$

Poniendo la expresión $y'''_k$ en la ecuación (8), tenemos:

$$y''_k = \frac{\Delta y'_{k-1}}{h} + \frac{\Delta^2 y'_{k-1}}{2h}. \tag{11}$$

Así, hemos hallado $y_k''$ e $y_k'''$. Poniendo las expresiones (10) y (11) en el desarrollo (5), obtenemos:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y_k' + \frac{h}{2} \Delta y_{k-1}' + \frac{5h}{12} \Delta^2 y_{k-2}'. \tag{12}$$

Esta es la llamada *fórmula de Adams* de cuatro términos. La fórmula (12) permite determinar $y_{k+1}$, conociendo $y_k$, $y_{k-1}$, $y_{k-2}$. Así, si conocemos $y_0$, $y_1$ e $y_2$, podemos hallar $y_3$ y luego $y_4$, $y_5$, . . .

**Observación 1.** Indiquemos sin demostración, si existe en el segmento $[x_0, b]$ una solución única de la ecuación (1), que satisface *las condiciones iniciales, el error de los valores aproximados* determinados por la fórmula (12), en su valor absoluto, no supera a $Mh^4$, donde $M$ es una constante, dependiente del largo del intervalo y la forma de la función $f(x, y)$ y no dependiente de la magnitud $h$.

**Observación 2.** Si queremos obtener una precisión mayor del cálculo, debemos tomar mayor número de términos que en el desarrollo (5); entonces la fórmula (12) cambiará del modo correspondiente. Por ejemplo, si en vez de la fórmula (5) tomamos la fórmula que contiene cinco términos en el segundo miembro, es decir, si añadimos un término de orden $h^4$, entonces, en lugar de la fórmula (12) obtenemos de modo semejante la que sigue

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y_k' + \frac{h}{2} \Delta y_{k-1}' + \frac{5h}{12} \Delta^2 y_{k-2}' + \frac{3h}{8} \Delta^3 y_{k-3}'.$$

Aquí, $y_{k+1}$ se determina mediante los valores $y_k$, $y_{k-1}$, $y_{k-2}$ e $y_{k-3}$. Por consiguiente, para comenzar los cálculos, utilizando esta fórmula, es preciso conocer los primeros cuatro valores: $y_0$, $y_1$, $y_2$, $y_3$. Al calcular estos valores por las fórmulas de la forma (4), debemos tomar cinco primeros términos del desarrollo.

**Ejemplo 1.** Hallar los valores aproximados de la solución de la ecuación

$$y' = y + x,$$

que satisface la condición inicial:

$$y_0 = 1; \text{ cuando } x_0 = 0.$$

Determinar los valores de la solución para $x = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$; $0{,}4$.

**Solución.** Utilizando las fórmulas (4) y (4'), hallemos, al principio, $y_1$ e $y_2$. De la ecuación y los datos iniciales obtenemos

$$y_0' = (y + x)_{x=0} = y_0 + 0 = 1 + 0 = 1.$$

Derivando la ecuación dada, tenemos:

$$y'' = y' + 1.$$

Por tanto,

$$y_0'' = (y' + 1)_{x=0} = 1 + 1 = 2.$$

Derivemos una vez más:

$$y''' = y''.$$

Por consiguiente,

$$y_0''' = y_0'' = 2.$$

Poniendo en la ecuación (4) los valores de $y_0$, $y_0'$, $y_0''$ y $h=0,1$, obtenemos:

$$y_1 = 1 + \frac{0,1}{1}\cdot 1 + \frac{(0,1)^2}{1\cdot 2}\cdot 2 + \frac{(0,1)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2 = 1,1103.$$

De modo análogo, para $h=0,2$ obtenemos:

$$y_2 = 1 + \frac{0,2}{1}\cdot 1 + \frac{(0,2)^2}{1\cdot 2}\cdot 2 + \frac{(0,2)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2 = 1,2426$$

Conociendo $y_0$, $y_1$, $y_2$ a base de la ecuación, hallamos:

$$y_0' = y_0 + 0 = 1;$$
$$y_1' = y_1 + 0,1 = 1,1103 + 0,1 = 1,2103;$$
$$y_2' = y_2 + 0,2 = 1,2426 + 0,2 = 1,4426;$$
$$\Delta y_0' = 0,2103;$$
$$\Delta y_1' = 0,2323;$$
$$\Delta^2 y_0' = 0,0220.$$

Los valores obtenidos anotemos en la tabla:

| $x$ | $y$ | $y'$ | $\Delta y'$ | $\Delta^2 y'$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0=0$ | $y_0=1,0000$ | $y_0'=1$ | | |
| | | | $\Delta y_0'=0,2103$ | |
| $x_1=0,1$ | $y_1=1,1103$ | $y_1'=1,2103$ | | $\Delta^2 y_0'=0,0220$ |
| | | | $\Delta y_1'=0,2323$ | |
| $x_2=0,2$ | $y_2=1,2426$ | $y_2'=1,4426$ | | $\Delta^2 y_1'=0,0228$ |
| | | | $\Delta y_2'=0,2551$ | |
| $x_3=0,3$ | $y_3=1,3977$ | $y_3'=1,6977$ | | |
| $x_4=0,4$ | $y_4=1,5812$ | | | |

Según la fórmula (12) encontramos $y_3$:

$$y_3=1{,}2426+\frac{0{,}1}{1}\cdot 1{,}4426+\frac{0{,}1}{2}\cdot 0{,}2323+\frac{5\cdot(0{,}1)}{12}\cdot 0{,}0220=1{,}3977.$$

Encontremos ahora los valores de $y'_3$, $\Delta y'_2$, $\Delta^2 y'_1$. Usando de nuevo la fórmula (12), hallamos $y_4$:

$$y_4=1{,}3977+\frac{0{,}1}{1}\cdot 1{,}6977+\frac{0{,}1}{2}\cdot 0{,}2551+\frac{5}{12}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}0228=1{,}5812.$$

La expresión exacta de la solución de la ecuación dada es:

$$y = 2e^x - x - 1.$$

Por consiguiente, $y_{x=0,4}= 2e^{0,4} - 0{,}4 - 1 = 1{,}5836$. El error absoluto es 0,0024; el error relativo es $\frac{0{,}0024}{1{,}5836} = 0{,}0015 \approx 0{,}15\%$. (El error absoluto del valor de $y_4$, calculado por el método de Euler, es 0,06; el error relativo es $0{,}038 \approx 3{,}8\%$).

**Ejemplo 2.** Hallar los valores aproximados de la solución de la ecuación

$$y' = y^2 + x^2,$$

que satisface a la condición inicial; $y_0 = 0$, cuando $x_0 = 0$. Determinar los valores de la solución para $x = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4$.

**Solución.** Hallemos:

$$y'_0=0^2+0^2=0,\quad y''_{x=0}=(2yy'+2x)_{x=0}=0,\quad y'''_{x=0}=(2y'^2+2yy''+2)_{x=0}=2.$$

Según las fórmulas (4) y (4') obtenemos:

$$y_1=\frac{(0{,}1)^3}{3!}\cdot 2=0{,}0003,\qquad y_2=\frac{(0{,}2)^3}{3!}\cdot 2=0{,}0026.$$

De la ecuación encontramos:

$$y'_0=0,\quad y'_1=0{,}0100,\quad y'_2=0{,}0400.$$

Basándonos en estos datos, formamos los primeros renglones de la tabla, luego, utilizando la fórmula (12), determinamos los valores de $y_3$ e $y_4$.

| $x$ | $y$ | $y'$ | $\Delta y'$ | $\Delta^2 y'$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0=0$ | $y_0=0$ | $y'_0=0$ | | |
| | | | $\Delta y'_0=0{,}0100$ | |
| $x_1=0{,}1$ | $y_1=0{,}0003$ | $y'_1=0{,}0100$ | | $\Delta^2 y'_0=0{,}0200$ |

| $x$ | $y$ | $y'$ | $\Delta y'$ | $\Delta^2 y'$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | $\Delta y'_1 = 0{,}0300$ | |
| $x_2 = 0{,}2$ | $y_2 = 0{,}0026$ | $y'_2 = 0{,}0400$ | | $\Delta^2 y'_1 = 0{,}0201$ |
| | | | $\Delta y'_2 = 0{,}0501$ | |
| $x_3 = 0{,}3$ | $y_3 = 0{,}0089$ | $y'_3 = 0{,}0901$ | | |
| $x_4 = 0{,}4$ | $y_4 = 0{,}0204$ | | | |

Así,

$$y_3 = 0{,}0026 + \frac{0{,}1}{1}\cdot 0{,}0400 + \frac{0{,}1}{2}\cdot 0{,}0300 + \frac{5}{12}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}0200 = 0{,}0089,$$

$$y_4 = 0{,}0089 + \frac{0{,}1}{1}\cdot 0{,}0901 + \frac{0{,}1}{2}\cdot 0{,}0501 + \frac{5}{12}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}0201 = 0{,}0204.$$

Notemos que las primeras cuatro cifras exactas en $y_4$ son: $y_4 = 0{,}0213$. (Este resultado podemos obtener usando otros métodos más exactos y la evaluación del error.)

## § 34. METODO APROXIMADO DE INTEGRACION DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Los métodos de integración aproximada de las ecuaciones diferenciales, analizados en los §§ 32 y 33, podemos aplicar también para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. Examinemos aquí el método de diferencias usado para solucionar los sistemas de ecuaciones. Analicemos aquí el sistema de dos ecuaciones con dos funciones desconocidas.

Hallar las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z), \tag{1}$$

$$\frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z), \tag{2}$$

que satisfagan a las condiciones iniciales $y = y_0$, $z = z_0$, cuando $x = x_0$.

Determinemos los valores de las funciones $y$ y $z$ para los valores del argumento: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$. Sea, de nuevo,

$$x_{k+1} - x_k = \Delta x = h \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{3}$$

Designemos los valores aproximados de la función mediante

$$y_0, y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_n$$

y, respectivamente,

$$z_0, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_n.$$

Escribamos las fórmulas recurrentes de la forma (12) § 33:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5}{12} h \Delta^2 y'_{k-2}, \tag{4}$$

$$z_{k+1} = z_k + \frac{h}{1} z'_k + \frac{h}{2} \Delta z'_{k-1} + \frac{5}{12} h \Delta^2 z'_{k-2}. \tag{5}$$

Para utilizar estas fórmulas, es preciso saber, aparte de los $y_0$ y $z_0$ dados, también $y_1, y_2; z_1, z_2$. Estos valores hallamos por las fórmulas de la forma (4) y (4') § 32:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1} y'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0 + \frac{h^3}{3!} y'''_0,$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1} y'_0 + \frac{(2h)^2}{2} y''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} y'''_0,$$

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{1} z'_0 + \frac{h^2}{2} z''_0 + \frac{h^3}{3!} z'''_0,$$

$$z_2 = z_0 + \frac{2h}{1} z'_0 + \frac{(2h)^2}{2} z''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} z'''_0.$$

Podemos aplicar estas fórmulas, cuando conocemos $y'_0, y''_0, y'''_0, z'_0, z''_0, z'''_0$ que debemos determinar. De las ecuaciones (1) y (2) hallamos:

$$y'_0 = f_1(x_0, y_0, z_0), \quad z'_0 = f_2(x_0, y_0, z_0).$$

Derivando las ecuaciones (1) y (2) y poniendo los valores de $x_0, y_0, z_0, y'_0, z'_0$, hallamos:

$$y''_0 = (y'')_{x=x_0} = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' + \frac{\partial f_1}{\partial z} z' \right)_{x=x_0}.$$

$$z_0'' = (z'')_{x=x_0} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} y' + \frac{\partial f_2}{\partial z} z'\right)_{x=x_0}.$$

Derivando una vez más hallamos $y_0'''$ y $z_0'''$. Conociendo $y_1$, $y_2$, $z_1$, $z_2$, de las ecuaciones dadas (1) y (2) encontramos:

$$y_1',\ y_2',\ z_1',\ z_2',\ \Delta y_0',\ \Delta y_1',\ \Delta^2 y_0',\ \Delta z_0',\ \Delta z_1',\ \Delta^2 z_0',$$

después de lo cual podemos llenar los primeros cinco renglones de la tabla:

| $x$ | $y$ | $y'$ | $\Delta y'$ | $\Delta^2 y'$ | $z$ | $z'$ | $\Delta z'$ | $\Delta^2 z'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $y_0$ | $y_0'$ | | | $z_0$ | $z_0'$ | | |
| | | | $\Delta y_0'$ | | | | $\Delta z_0'$ | |
| $x_1$ | $y_1$ | $y_1'$ | | $\Delta^2 y_0'$ | $z_1$ | $z_1'$ | | $\Delta^2 z_0'$ |
| | | | $\Delta y_1'$ | | | | $\Delta z_1'$ | |
| $x_2$ | $y_2$ | $y_2'$ | | $\Delta^2 y_1'$ | $z_2$ | $z_2'$ | | $\Delta^2 z_1'$ |
| | | | $\Delta y_2'$ | | | | $\Delta z_2'$ | |
| $x_3$ | $y_3$ | $y_3'$ | | | $z_3$ | $z_3'$ | | |

De las fórmulas (4) y (5) hallemos $y_3$ y $z_3$ y de las ecuaciones (1) y (2) encontremos $y_3'$ y $z_3'$. Determinados $\Delta y_2'$, $\Delta^2 y_1'$, $\Delta z_2'$, $\Delta^2 z_1'$, otra vez de las fórmulas (4) y (5) hallamos $y_4$ e $y_5$, etc.

**Ejemplo.** Hallar los valores aproximados de las soluciones del sistema

$$y' = z,\quad z' = y,$$

si según las condiciones iniciales $z_0 = 1$, cuando $x = 0$ e $y_0 = 0$. Calcular los valores de las soluciones para $x = 0$; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4.

**Solución.** De las ecuaciones dadas encontramos:

$$y_0' = z_{x=0} = 1, \qquad z_0' = y_{x=0} = 0.$$

Derivando estas ecuaciones, hallamos:

$$y_0'' = (y'')_{x=0} = (z')_{x=0} = 0,$$
$$z_0'' = (z'')_{x=0} = (y')_{x=0} = 1,$$
$$y_0''' = (y''')_{x=0} = (z'')_{x=0} = 1,$$
$$z_0''' = (z''')_{x=0} = (y'')_{x=0} = 0.$$

Utilizando las fórmulas de la forma (4) y (5), encontramos:

$$y_1=0+\frac{0,1}{1}\cdot 1+\frac{(0,1)^2}{1\cdot 2}\cdot 0+\frac{(0,1)^3}{3!}\cdot 1=0,1002,$$

$$y_2=0+\frac{0,2}{1}\cdot 1+\frac{(0,2)^2}{1\cdot 2}\cdot 0+\frac{(0,2)^3}{3!}\cdot 1=0,2016,$$

$$z_1=1+\frac{0,1}{1}\cdot 0+\frac{(0,1)^2}{1\cdot 2}\cdot 1+\frac{(0,1)^3}{3!}\cdot 0=1,0050,$$

$$z_2=1+\frac{0,2}{1}\cdot 0+\frac{(0,2)^2}{2!}\cdot 1+\frac{(0,2)^3}{3!}\cdot 0=1,0200.$$

En virtud de las ecuaciones dadas, tenemos:

$$y_1'=1,0050, \qquad y_2'=1,0200,$$

$$z_1'=0,1002, \qquad z_2'=0,2016,$$

$$\Delta y_0'=0,0050, \qquad \Delta z_0'=0,1002,$$

$$\Delta y_1'=0,0150, \qquad \Delta z_1'=0,1014,$$

$$\Delta^2 y_0'=0,0100, \qquad \Delta^2 z_0'=0,0012.$$

Ahora llenemos primeros cinco renglones de la tabla:

| $x$ | $y$ | $y'$ | $\Delta y'$ | $\Delta^2 y'$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0=0$ | $y_0=0$ | $y_0'=1$ | | |
| | | | $\Delta y_0'=0,0050$ | |
| $x_1=0,1$ | $y_1=0,1002$ | $y_1'=1,0050$ | | $\Delta^2 y_0'=0,0100$ |
| | | | $\Delta y_1'=0,0150$ | |
| $x_2=0,2$ | $y_2=0,2016$ | $y_2'=1,0200$ | | $\Delta^2 y_1'=0,0109$ |
| | | | $\Delta y_2'=0,0259$ | |
| $x_3=0,3$ | $y_3=0,3049$ | $y_3'=1,0459$ | | |
| $x_4=0,4$ | $y_4=0,4117$ | | | |

| $x$ | $z$ | $z'$ | $\Delta z'$ | $\Delta^2 z'$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0=0$ | $z_0=1$ | $z'_0=0$ | | |
| | | | $\Delta z'_0=0,1002$ | |
| $x_1=0,1$ | $z_1=1,0050$ | $z'_1=0,1002$ | | $\Delta^2 z'_0=0,0012$ |
| | | | $\Delta z'_1=0,1014$ | |
| $x_2=0,2$ | $z_2=1,0200$ | $z'_2=0,2016$ | | $\Delta^2 z'_1=0,0019$ |
| | | | $\Delta z'_2=0,1033$ | |
| $x_3=0,3$ | $z_3=1,0459$ | $z'_3=0,3049$ | | |
| $x_4=0,4$ | $z_4=1,0817$ | | | |

De las fórmulas (4) y (5), hallamos:

$$y_3=0{,}2016+\frac{0{,}1}{1}\cdot 1{,}0200+\frac{0{,}1}{2!}\cdot 0{,}0150+\frac{5}{12}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}0100=0{,}3049.$$

$$z_3=1{,}0200+\frac{0{,}1}{1}\cdot 1{,}2016+\frac{0{,}1}{2}\cdot 0{,}1014+\frac{5}{12}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}0012=1{,}0459$$

y, análogamente:

$$y_4=0{,}3049+\frac{0{,}1}{1}\cdot 1{,}0459+\frac{0{,}1}{2}\cdot 0{,}0259+\frac{5}{12}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}0109=0{,}4117,$$

$$z_4=1{,}0459+\frac{0{,}1}{1}\cdot 0{,}3049+\frac{0{,}1}{2}\cdot 0{,}1033+\frac{5}{12}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}0019=1{,}0817.$$

Es evidente que las soluciones exactas del sistema dado de las ecuaciones, que satisfacen a las condiciones iniciales, serán:

$$y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}), \qquad z=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}).$$

Por eso, las primeras cuatro cifras exactas después de la coma de las soluciones son:

$$y_4=\frac{1}{2}(e^{0,4}-e^{-0,4})=0{,}4107, \qquad z_4=\frac{1}{2}(e^{0,4}+e^{-0,4})=1{,}0811.$$

**Observación.** Puesto que las ecuaciones de órdenes superiores y los sistemas de éstas se reducen en muchos casos al sistema de ecuaciones de primer orden, el método expuesto es aplicable también a la solución de los problemas semejantes.

## Ejercicios para el capítulo XIII

Demostrar que las funciones indicadas, dependientes de las constantes arbitrarias, satisfacen las ecuaciones diferenciales correspondientes:

| Funciones | Ecuaciones diferenciales |
|---|---|
| 1. $y=\operatorname{sen} x-1+Ce^{-\operatorname{sen} x}$. | $\frac{dy}{dx}+y\cos x=\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$. |
| 2. $y=Cx+C-C^2$. | $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}+y=0$. |
| 3. $y^2=2Cx+C^2$. | $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x\frac{dy}{dx}-y=0$. |
| 4. $y^2=Cx^2-\frac{a^2C}{1+C}$. | $xy\left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=(x^2-y^2-a^2)\frac{dy}{dx}$. |
| 5. $y=C_1x+\frac{C_2}{x}+C_3$. | $\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{3}{x}\frac{d^2y}{dx^2}=0$. |
| 6. $y=(C_1+C_2x)e^{kx}+\frac{e^x}{(k-1)^2}$. | $\frac{d^2y}{dx^2}-2k\frac{dy}{dx}+k^2y=e^x$. |
| 7. $y=C_1e^{a\arcsen x}+C_2e^{-a\arcsen x}$. | $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-a^2y=0$. |
| 8. $y=\frac{C_1}{x}+C_2$. | $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}=0$. |

**Integrar las ecuaciones diferenci con varalesiables separables** **9.** $y\,dx-x\,dy=0$. *Resp.* $y=Cx$. **10.** $(1+u)\,v\,du+(1-v)\,u\,dv=0$. *Resp.* $\ln uv+u-v=C$. **11.** $(1+y)\,dx-(1-x)\,dy=0$. *Resp.* $(1+y)(1-x)=C$. **12.** $(t^2-xt^2)\times\frac{dx}{dt}+x^2+tx^2=0$. *Resp.* $\frac{t+x}{tx}+\ln\frac{x}{t}=C$. **13.** $(y-a)\,dx+x^2\,dy=0$. *Resp.* $(y-a)=Ce^{\frac{1}{x}}$. **14.** $z\,dt-(t^2-a^2)\,dz=0$. *Resp.* $z^{2a}=C\frac{t-a}{t+a}$. **15.** $\frac{dx}{dy}=\frac{1+x^2}{1+y^2}$. *Resp.* $x=\frac{y+C}{1-Cy}$. **16.** $(1+s^2)\,dt-\sqrt{t}\,ds=0$. *Resp.* $2\sqrt{t}-\operatorname{arctg} s=C$. **17.** $d\rho+\rho\operatorname{tg}\theta\,d\theta=0$. *Resp.* $\rho=C\cos\theta$. **18.** $\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,d\theta-\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi=0$. *Resp.* $\cos\varphi=C\cos\theta$. **19.** $sc^2\theta\operatorname{tg}\varphi\,d\theta+sc^2\varphi\operatorname{tg}\theta\,d\varphi=0$. *Resp.* $\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi=C$. **20.** $sc^2\theta\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi+sc^2\varphi\operatorname{tg}\theta\,d\theta=0$. *Resp.* $\operatorname{sen}^2\theta+\operatorname{sen}^2\varphi=C$. **21.** $(1+x^2)\,dy-\sqrt{1-y^2}\,dx=0$. *Resp.* $\arcsen y-\operatorname{arctg} x=C$. **22.** $\sqrt{1-x^2}\,dy-\sqrt{1-y^2}\times dx=0$. *Resp.* $y\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-y^2}=C$. **23.** $3e^x\operatorname{tg} y\,dx+(1-e^x)\,sc^2y\,dy=0$. *Resp.* $\operatorname{tg} y=C(1-e^x)^3$. **24.** $(x-y^2x)\,dx+(y-x^2y)\,dy=0$. *Resp.* $x^2+y^2=x^2y^2+C$.

### Problemas de la formación de ecuaciones diferenciales

**25.** Demostrar que la curva cuyo coeficiente angular de la tangente en cada punto es proporcional a la abscisa del punto de tangencia es una parábola. *Respuesta*: $y=ax^2+C$.

**26.** Hallar una curva que pase por el punto $(0, -2)$, de tal modo que el coeficiente angular de la tangente en cada punto sea igual a la ordenada correspondiente de este punto aumentada en tres unidades. *Respuesta*: $y=e^x-3$.

**27.** Hallar una curva que pase por el punto (1,1) de tal manera que el coeficiente angular de la tangente en cada punto sea proporcional al cuadrado de la ordenada de este punto. *Respuesta:* $k(x-1)y-y+1=0$.

**28.** Hallar una curva para la cual el coeficiente angular de la tangente en cada punto sea $n$ veces mayor que la pendiente de la recta que une este punto con el origen de coordendas. *Respuesta:* $y=Cx^n$.

**29.** Trazar por el punto (2,1) una curva de tal manera que la tangente en cualquier punto coincida con la dirección del radio vector construido del origen de coordenadas a este punto. *Respuesta:* $y=\frac{1}{2}x$.

**30.** Hallar en coordenadas polares la ecuación de una curva tal que, en cada uno de sus puntos, la tangente del ángulo formado por el radio vector y la tangente a la curva sea igual a la magnitud inversa del radio vector, tomada con signo contrario. *Respuesta:* $r(\theta+C)=1$.

**31.** Hallar en coordenadas polares la ecuación de una curva tal que, en cada uno de sus puntos, la tangente del ángulo formado por el radio vector y la tangente a la curva sea igual al cuadrado del radio vector. *Respuesta:* $r^2=(\theta+C)^2$.

**32.** Demostrar que la curva cuya propiedad consiste en que todas sus normales pasan por un punto fijo es una circunferencia.

**33.** Hallar una curva de tal manera que en cada uno de sus puntos la longitud de la subtangente sea igual al doble valor de la abscisa. *Respuesta:* $y=C\sqrt{x}$.

**34.** Hallar una curva para la cual el radio vector sea igual a la longitud de la tangente comprendida entre el punto de tangencia y el eje $x$.

**Solución.** Según la hipótesis del problema $\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{x^2+y^2}$, de donde: $\frac{dy}{y}=\pm\frac{dx}{x}$.

Integrando obtenemos dos familias de curvas:

$$y=Cx \text{ e } y=\frac{C}{x}.$$

**35.** En virtud de la ley de Newton la velocidad de enfriamiento de un cuerpo al aire libre es proporcional a la diferencia de las temperaturas entre el cuerpo y el medio ambiente.

Sea la temperatura del aire igual a 20° C; y el cuerpo se enfría de 100° C hasta 60° C durante 20 minutos. ¿Qué tiempo se necesita para que la temperatura del cuerpo baje hasta 30° C?

**Solución.** La ecuación diferencial del problema es: $\frac{dT}{dt}=k(T-20)$. Integrando, encontramos: $T-20=Ce^{kt}$; $T=100$ para $t=0$; $T=60$ para $t=20$; entonces, $C=80$; $40=Ce^{20k}$, $e^k=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/20}$, por tanto, $T=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$. Haciendo $T=30$, encontramos $t=60$ min.

**36.** ¿Qué tiempo $T$ se necesita para que se desagüe el embudo cónico de 10 cm de altura y ángulo al vértice $d=60°$ por un orificio de 0,5 cm² en el fondo del embudo?

**Solución.** Calculemos mediante dos métodos diferentes el volumen del agua que se desagua entre los instantes $t$ y $t+\Delta t$. Siendo constante la velocidad $v$ del chorro, durante un segundo se derrama un cilindro de agua de altu-

ra $v$ y base 0,5 cm². Durante el tiempo $\Delta t$ se desagua un volumen $dv$ de agua igual a $-dv=-0{,}5v\,dt=-0{,}3\sqrt{2gh}\,dt$*).

Por otra parte, a consecuencia de la salida, la altura del agua adquiere un «incremento» negativo $dh$, y la diferencial del volumen de agua derramada es igual a:

$$-dv=\pi r^2\,dh=\frac{\pi}{3}(h+0{,}7)^2\,dh.$$

Así,

$$\frac{\pi}{3}(h+0{,}7)^2\,dh=-0{,}3\sqrt{2gh}\,dt,$$

de donde

$$t=0{,}0315\,(10^{5/2}-h^{5/2})+0{,}0732\,(10^{3/2}-h^{3/2})+0{,}078\,(\sqrt{10}-\sqrt{h}).$$

Haciendo $h=0$, obtenemos el tiempo $T$ de derrame: $T=12{,}5$ seg.

**37.** La acción de la fricción sobre un disco que gira dentro de un líquido es proporcional a la velocidad angular de rotación $\omega$. Hallar la dependencia entre la velocidad angular y el tiempo, si se conoce que la velocidad del disco baja de 100 rev/min a 60 rev/min, al pasar 1 min.

*Respuesta:* $\omega=100\left(\frac{3}{5}\right)^t$ rev/min.

**38.** Supongamos que la presión de una columna de aire en un nivel dado está acondicionada por la presión de las capas superiores de la atmósfera. Hallar la dependencia entre la presión y la altura, si se sabe, que al nivel del mar la presión es igual a 1 kg/cm², mientras que a 500 m de altura, es 0,92 kg/cm².

**Indicación:** Utilicemos la ley de Boyle-Marriotte que nos dice que la densidad de un gas es proporcional a su presión. La ecuación diferencial del problema es: $dp=-kp\,dh$, de donde $p=e^{-0{,}00017h}$. *Respuesta:* $p=e^{-0{,}00017h}$.

**Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:**

**39.** $(y-x)\,dx+(y+x)\,dy=0$. *Respuesta:* $y^2+2xy-x^2=C$. **40.** $(x+y)\,dx+x\,dy=0$. *Respuesta:* $x^2+2xy=C$. **41.** $(x+y)\,dx+(y-x)\,dy=0$. *Respuesta:* $\ln(x^2+y^2)^{1/2}-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$. **42.** $x\,dy-y\,dx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$. *Respuesta:* $1+2Cy-C^2x^2=0$. **43.** $(8y+10x)\,dx+(5y+7x)\,dy=0$. *Respuesta:* $(x+y)^2\times(2x+y)^3=C$. **44.** $(2\sqrt{st}-s)\,dt+t\,ds=0$. *Respuesta:* $te^{\sqrt{\frac{s}{t}}}=C$ ó $s=t\ln^2\frac{C}{t}$. **45.** $(t-s)\,dt+t\,ds=0$. *Respuesta:* $te^{\frac{s}{t}}=C$ ó $s=t\ln\frac{C}{t}$. **46.** $xy^2\,dy=(x^3+y^3)\,dx$. *Respuesta:* $y=x\sqrt[3]{3\ln Cx}$. **47.** $x\cos\frac{y}{x}(y\,dx+x\,dy)=y\operatorname{sen}\frac{y}{x}(x\,dy-y\,dx)$. *Respuesta:* $xy\cos\frac{y}{x}=C$.

**Integrar las ecuaciones diferenciales reducibles a las homogéneas:**

**48.** $(3y-7x+7)\,dx-(3x-7y-3)\,dy=0$. *Respuesta* $(x+y-1)^5(x-y-1)^2=C$.
**49.** $(x+2y+1)\,dx-(2x+4y+3)\,dy=0$. *Respuesta:* $\ln(4x+8y+5)+8y-4x=C$.
**50.** $(x+2y+1)\,dx-(2x-3)\,dy=0$. *Respuesta:* $\ln(2x-3)-\frac{4y+5}{2x-3}=C$.

*) La velocidad $v$ del chorro de agua a través du un orificio que se encuentra a la distancia $h$ de una superficie libre, se da por la fórmula: $v=0{,}6\sqrt{2gh}$; donde, $g$ es la aceleración de la fuerza de gravedad.

**51.** Determinar la curva cuya subnormal es la media aritmética de la abscisa y la ordenada del punto de esta curva. *Respuesta*: $(x-y)^2(x+2y)=C$.

**52.** Determinar la curva en la que la razón del segmento separado por la tangente en el eje $Oy$, respecto al radio vector, es una constante.

**Solución.** Según la hipótesis del problema $\dfrac{y-x\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}}=m$, de donde: $\left(\dfrac{x}{C}\right)^m-\left(\dfrac{C}{x}\right)^m=\dfrac{2y}{x}$.

**53.** Determinar la curva en la que la razón del segmento separado por la normal en el eje $Ox$ respecto al radio vector sea una constante.

**Solución.** Según la hipótesis $\dfrac{x+y\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}}=m$, de donde: $x^2+y^2=m^2(x-C)^2$.

**54.** Determinar la curva en la que el segmento separado por la tangente en el eje $Oy$ es igual a $a$ sc $\theta$, donde $\theta$ es el ángulo formado por el radio vector y el eje $Ox$.

**Solución.** Como $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{y}{x}$, y, según la hipótesis $y-x\dfrac{dy}{dx}=a\operatorname{sc}\theta$, tenemos $y-x\dfrac{dy}{dx}=a\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$, de donde:

$$y=\frac{x}{2}\left[e^{\frac{a}{x}+b}-e^{-\left(\frac{a}{x}+b\right)}\right].$$

**55.** Determinar la curva en la que el segmento separado en el eje de ordenadas por la normal trazada en algún punto de la curva es igual a la distancia entre el mismo punto y el origen de coordenadas.

**Solución.** El segmento separado por la normal en el eje $Oy$ es igual a $y+\dfrac{x}{y'}$, y, según la hipótesis, tenemos:

$$y+\frac{x}{y'}=\sqrt{x^2-y^2},\ \text{de donde}\ x^2=C\,(2y+C).$$

**56.** Hallar la forma de un espejo tal que refleje paralelamente a la dirección dada todos los rayos que salen de un mismo punto O.

**Solución.** Hagamos coincidir la dirección dada con el eje $Ox$. Sea $OM$ el rayo incidente, $MP$ el rayo reflejado y $MQ$ la normal a la curva buscada:

$$\alpha=\beta;\ OM=OQ,\ NM=y,$$

$$NQ=NO+OQ=-x+\sqrt{x^2+y^2}=y\operatorname{cotg}\beta=y\frac{dy}{dx},$$

de donde: $y\,dy=\left(-x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx$; integrando, tenemos: $y^2=C^2+2Cx$.

**Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:**

**57.** $y'-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^3$. *Respuesta*: $2y=(x+1)^4+C\,(x+1)^2$

**58.** $y'-a\dfrac{y}{x}=\dfrac{x+1}{x}$. *Respuesta*: $y=Cx^a+\dfrac{x}{1-a}-\dfrac{1}{a}$.

**59.** $(x-x^2)\,y'+(2x^2-1)\,y-ax^3=0$. *Respuesta*: $y=ax+Cx\sqrt{1-x^2}$

**60.** $\dfrac{ds}{dt}\cos t+s\operatorname{sen}t=1$ *Respuesta*: $s=\operatorname{sen}t+C\cos t$.

61. $\frac{ds}{dt}+s\cos t=\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$. *Respuesta*: $s=\operatorname{sen} t-1+Ce^{-\operatorname{sen} t}$.

62. $y'-\frac{n}{x}y=e^x x^n$. *Respuesta*: $y=x^n(e^x+C)$.

63. $y'+\frac{n}{x}y=\frac{a}{x^n}$. *Respuesta*: $x^n y=ax+C$.

64. $y'+y=\frac{1}{e^x}$. *Respuesta*: $e^x y=x+C$.

65. $y'+\frac{1-2x}{x^2}y-1=0$. *Respuesta*: $y=x^2\left(1+Ce^{\frac{1}{x}}\right)$

**Integrar las ecuaciones de Bernoulli:**

66. $y'+xy=x^3y^3$. *Respuesta*: $y^2(x^2+1+Ce^{x^2})=1$. **67.** $(1-x^2)y'-xy-axy^2=0$. *Respuesta*: $(C\sqrt{1-x^2}-a)y=1$. **68.** $3y^2y'-ay^3-x-1=0$. *Respuesta*: $a^2y^3=Ce^{ax}-a(x+1)-1$. **69.** $y'(x^2y^3+xy)=1$. *Respuesta*: $x\left[(2-y^2)e^{\frac{1}{2}y^2}+C\right]=e^{\frac{1}{2}y^2}$. **70.** $(y\ln x-2)y\,dx=x\,dy$. *Respuesta*: $y(Cx+\ln x+1)=1$. **71.** $y-y'\cos x=y^2\cos x(1-\operatorname{sen} x)$. *Respuesta*: $y=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{sc} x}{\operatorname{sen} x+C}$.

**Integrar las siguientes ecuaciones en diferenciales totales:**

72. $(x^2+y)dx+(x-2y)dy=0$. *Resp.* $\frac{x^3}{3}+yx-y^2=C$. **73.** $(y-3x^2)dx-(4y-x)dy=0$. *Resp.* $2y^2-xy+x^3=C$. **74.** $(y^3-x)y'=y$. *Resp.* $y^4=4xy+C$. **75.** $\left[\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x}\right]dx+\left[\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy=0$. *Resp.* $\ln\frac{y}{x}-\frac{xy}{x-y}=C$. **76.** $2(3xy^2+2x^3)dx+3(2x^2y+y^2)dy=0$. *Resp.* $x^4+3x^2y^2+y^3=C$. **77.** $\frac{x\,dx+(2x+y)\,dy}{(x+y)^2}=0$. *Resp.* $\ln(x+y)-\frac{x}{x+y}=C$. **78.** $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)dx=\frac{2y\,dy}{x^3}$. *Resp.* $x^2+y^2=Cx^3$. **79.** $\frac{x^2\,dy-y^2\,dx}{(x-y)^2}=0$. *Resp.* $\frac{xy}{x-y}=C$. **80.** $x\,dx+y\,dy=\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$. *Resp.* $x^2+y^2-2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=C$.

**81.** Hallar la curva cuya propiedad consiste en que el producto del cuadrado de la distancia, entre cualquiera de sus puntos y el origen de coordenadas, por el segmento, separado en el eje de las abscisas por la normal al punto mencionado, es igual al cubo de la abscisa de este punto. *Respuesta*: $y^2(2x^2+y^2)=C$.

**82.** Hallar la envolvente de las siguientes familias de curvas:

a) $y=Cx+C^2$. *Resp.* $x^2+4y=0$. b) $y=\frac{x}{C}+C^2$. *Resp.* $27x^2=4y^3$. c) $\frac{x}{C}-\frac{y}{C^3}=2$. *Resp.* $27y=x^3$. d) $C^2x+Cy-1=0$. *Resp.* $y^2+4x=0$. e) $(x-C)^3+(y-C)^2=C^2$. *Resp.* $x=0$; $y=0$. f) $(x-C)^2+y^2=4C$. *Resp.* $y^2=4x+4$. g) $(x-C)^2+(y-C)^2=4$. *Resp.* $(x-y)^2=8$. h) $Cx^2+C^2y=1$. *Resp.* $x^4+4y=0$.

**83.** Una recta se desplaza de tal modo que la suma de los segmentos separados por ella en los ejes de coordenadas es igual a una constante $a$. Escribir

la ecuación de la envolvente de esta familia de rectas. *Respuesta*: $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$ (parábola).

**84.** Hallar la envolvente de una familia de rectas tales que los ejes de coordenadas separan sobre estas rectas un segmento de longitud constante $a$. *Respuesta*: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

**85.** Hallar la envolvente de una familia de circunferencias cuyos diámetros son el doble de las ordenadas de la parábola $y^2=2px$. *Respuesta*: $y^2=$ $=2p\left(x+\frac{p}{2}\right)$.

**86.** Hallar la envolvente de una familia de circunferencias que tienen sus centros en la parábola $y^2=2px$ y pasan por el vértice de esta parábola. *Respuesta*: la cisoide $x^3+y^2(x+2p)=0$.

**87.** Hallar la envolvente de una familia de circunferencias cuyos diámetros son cuerdas de la elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, perpendiculares al eje $Ox$. *Respuesta*: $\frac{x^2}{a^2+b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

**88.** Hallar la evoluta de la elipse $x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$ como envolvente de sus normales. *Respuesta*: $(ax)^{2/3}+(by)^{2/3}=(a^2-b^2)^{2/3}$.

**Integrar las siguientes ecuaciones (de Lagrange):**

**89.** $y=2xy'+y'^2$. *Respuesta*: $x=\frac{C}{3p^2}-\frac{2}{3}p$; $y=\frac{2C-p^3}{3p}$.

**90.** $y=xy'^2+y'^2$. *Respuesta*: $y=(\sqrt{x+1}+C)^2$. La solución singular: $y=0$.

**91.** $y=x(1+y')+(y')^2$. *Respuesta*: $x=Ce^{-p}-2p+2$; $y=C(p+1)c^{-p}-$ $-p^2+2$.

**92.** $y=yy'^2+2xy'$. *Respuesta*: $4Cx=4C^2-y^2$.

**93.** Hallar una curva de normal constante. *Respuesta*: $(x-C)^2+y^2=a^2$. Solución singular: $y=\pm a$.

**Integrar las ecuaciones de Clairaut:**

**94.** $y=xy'+y'-y'^2$. *Respuesta*: $y=Cx+C-C^2$. Solución singular: $4y=(x+1)^2$.

**95.** $y=xy'+\sqrt{1-y'^2}$. *Respuesta*: $y=Cx+\sqrt{1-C^2}$. Solución singular: $y^2-x^2=1$.

**96.** $y=xy'+y'$. *Respuesta*: $y=Cx+C$.

**97.** $y=xy'+\frac{1}{y'}$. *Respuesta*: $y=Cx+\frac{1}{C}$. Solución singular: $y^2=4x$.

**98.** $y=xy'-\frac{1}{y'^2}$. *Respuesta*: $y=Cx-\frac{1}{C^2}$. Solución singular: $y^3=$ $=-\frac{27}{4}x^2$.

**99.** El área de un triángulo, formado por la tangente a una curva buscada y los ejes de coordenadas, es una magnitud constante. Hallar esta curva. *Respuesta*: la hipérbola equilátera $4xy=\pm a^2$. Además, cualquier recta de la familia $y=Cx\pm a\sqrt{C}$.

**100.** Hallar una curva tal que el segmento de su tangente comprendido entre los ejes de coordenadas tenga una longitud constante $a$. Respuesta: $y=Cx\pm\frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$. Solución singular: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

**101.** Hallar una curva tal que la suma de los segmentos separados por sus tangentes en los ejes de coordenadas sea igual a $2a$. *Respuesta*: $y=Cx-$ $-\frac{2aC}{1-C}$. Solución singular: $(y-x-2a)^2=8ax$.

**102.** Hallar las curvas tales que el producto de las distancias, desde una tangente cualquiera hasta dos puntos dados, sea constante. *Respuesta*: las elipses y las hipérbolas (trayectorias ortogonales e isogonales).

**103.** Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $y = ax^n$. *Respuesta*: $x^2 + ny^2 = C$.

**104.** Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de parábolas $y^2 = 2p(x - \alpha)$ ($\alpha$ es el parámetro de la familia). *Respuesta*: $y = Ce^{-\frac{x}{p}}$.

**105.** Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $x^2 - y^2 = \alpha$ ($\alpha$ es el parámetro). *Respuesta*: $y = \frac{C}{x}$.

**106.** Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = 2ax$. *Respuesta*: las circunferencias $y = C(x^2 + y^2)$.

**107.** Hallar las trayectorias ortogonales de parábolas iguales, cuyas vértices se encuentran en una recta dada. *Respuesta*: si $2p$ es el parámetro de las parábolas y $Oy$ es la recta dada, la ecuación de las trayectorias será $y + C = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{p}}\, x^{3/2}$.

**108.** Hallar las trayectorias ortogonales de las cisoides $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$. *Respuesta*: $(x^2 + y^2)^2 = C(y^2 + 2x^2)$.

**109.** Hallar las trayectorias ortogonales de las lemniscatas $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)a^2$. *Respuesta*: $(x^2 + y^2)^2 = Cxy$.

**110.** Hallar las trayectorias isogonales de la familia de curvas: $x^2 = 2a(y - x\sqrt{3})$, donde $a$ es un parámetro variable, si el ángulo constante $\omega$ formado por las curvas de la familia y sus trayectorias es igual a 60°.

**Solución.** Hallamos la ecuación diferencial de la familia de curvas $y' = \frac{2y}{x} - \sqrt{3}$ y sustituimos $y'$ por la expresión

$$q = \frac{y' - \operatorname{tg}\omega}{1 + y' \operatorname{tg}\omega}\cdot \text{Si } \omega = 60°, \text{ tenemos } q = \frac{y' - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}y'} \text{ y}$$

obtenemos la ecuación diferencial: $\frac{y' - \sqrt{3}}{1 + y'\sqrt{3}} = \frac{2y}{x} - \sqrt{3}$. La integral general $y^2 = C(x - y\sqrt{3})$ da la familia buscada de trayectorias.

**111.** Hallar las trayectorias isogonales de la familia de parábolas $y^2 = 4Cx$, cuando $\omega = 45°$. *Respuesta*: $y^2 - xy + 2x^2 = Ce^{\frac{6}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2y - x}{x\sqrt{7}}}$.

**112.** Hallar las trayectorias isogonales de la familia de rectas, $y = Cx$, cuando $\omega = 30°, 45°$. *Respuesta*: las espirales logarítmicas

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = e^{2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}; \\ x^2 + y^2 = e^{2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}. \end{cases}$$

**113.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$. Eliminar $C_1$ y $C_2$. *Respuesta*: $y'' - y = 0$.

**114.** Escribir la ecuación diferencial de todas las circunferencias dispuestas en un mismo plano. *Respuesta*: $(1 + y'^2)y''' - 3y'y''^2 = 0$.

**115.** Escribir la ecuación diferencial de todas las curvas centrales de segundo orden, cuyos ejes principales coinciden con los $Ox$, $Oy$. *Respuesta*: $x(yy'' + y'^2) - y'y = 0$.

**116.** Sea la ecuación diferencial $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ y su solución general $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x}$.

1) Verificar que la familia dada de curvas es realmente la solución general;

2) hallar la solución particular, si para $x=0$ tenemos: $y=1$, $y'=0$, $y''=-1$. *Respuesta*: $y=\frac{1}{6}(9e^x+e^{-x}-4e^{2x})$.

**117.** Sea la ecuación diferencial $y''=\frac{1}{2y'}$ y su solución general $y= \pm\frac{2}{3}(x+C_1)^{3/2}+C_2$.

1) Verificar que la familia dada de curvas es realmente la solución general;

2) hallar la curva integral que pasa por el punto (1, 2), si la tangente en este punto forma con la dirección positiva del eje $Ox$ un ángulo de 45°. *Respuesta*: $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{4}{3}$.

Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales simples de segundo orden que se reducen a las ecuaciones de primer orden.

**118.** $xy'''=2$. *Respuesta*: $y=x^2\ln x+C_1x^2+C_2x+C_3$; escribir la solución particular que satisfaga las siguientes condiciones iniciales: $x=1$; $y=1$; $y'=1$; $y''=3$. **119.** $y^{(n)}=x^{(m)}$. *Respuesta*: $y=\frac{m!\,x^{m+n}}{(m+n)!}+C_1x^{n-1}+\ldots+C_{n-1}x+C_n$.
**120.** $y''=a^2y$. *Respuesta*: $ax=\ln\left(ay+\sqrt{a^2y^2+C_1}\right)+C_2$ ó $y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}$.
**121.** $y''=\frac{a}{y^3}$. *Respuesta*: $(C_1x+C_2)^2=C_1y^2-a$.

En los ejemplos 122-125 escribir la solución particular que satisfaga las siguientes condiciones iniciales: $x=0$, $y=-1$; $y'=0$. **122.** $xy''-y'=x^2e^x$. *Respuesta*: $y=e^x(x-1)+C_1x^2+C_2$. Solución particular: $y=e^x(x-1)$. **123.** $yy''-(y')^2+(y')^3=0$. *Respuesta*: $y+C_1\ln y=x+C_2$. Solución particular: $y=-1$. **124.** $y''+y'\operatorname{tg}x=\operatorname{sen}2x$. *Respuesta*: $y=C_2+C_1\operatorname{sen}x-x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x$. Solución particular: $y=2\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}x\cos x-x-1$. **125.** $(y'')^2+(y')^2=a^2$. *Respuesta*: $y=C_2-a\cos(x+C_1)$. Solución particular: $y=a-1-a\cos x$; $y=a\cos x-(a+1)$. (Indicación. Forma paramétrica $y''=a\cos t$, $y'=a\operatorname{sen}t$).
**126.** $y''=\frac{1}{2y'}$. *Respuesta*: $y=\pm\frac{2}{3}(x+C_1)^{3/2}+C_2$. **127.** $y'''=y''^2$. *Respuesta*: $y=(C_1-x)[\ln(C_1-x)-1]+C_2x+C_3$. **128.** $y'y'''-3y''^2=0$. *Respuesta*: $x=C_1y^2+C_2y+C_3$.

Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes: **129.** $y''=9y$. *Respuesta*: $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$. **130.** $y''+y=0$. *Respuesta*: $y=A\cos x+B\operatorname{sen}x$. **131.** $y''-y'=0$. *Respuesta*: $y=C_1+C_2e^x$. **132.** $y''+12y=7y'$. *Respuesta*: $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$. **133.** $y''-4y'+4y=0$. *Respuesta*: $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$. **134.** $y''+2y'+10y=0$. *Respuesta*: $y=e^{-x}(A\cos 3x+B\operatorname{sen}3x)$.
**135.** $y''+3y'-2y=0$. *Respuesta*: $y=C_1e^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}x}+C_2e^{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}x}$. **136.** $4y''-12y'+9y=0$. *Respuesta*: $y=(C_1+C_2x)e^{3/2x}$. **137.** $y''+y'+y=0$. *Respuesta*: $y=e^{-\frac{1}{2}x}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+B\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$.

**138.** Dos cargas iguales están suspendidas al extremo de un muelle. Hallar el movimiento que adquiere una de las cargas si la otra se desata. *Respuesta*:

$x=a\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\,t\right)$, donde $a$ es el alargamiento del muelle bajo la acción de una carga en el estado de equilibrio.

**139.** Un punto material de masa $m$ es atraido por cada uno de dos centros con fuerzas proporcionales a la distancia. El factor de proporcionalidad es igual a $k$. La distancia entre dos centros es $2c$. El punto se halla en el instante inicial en la línea que une los centros a la distancia $a$ de su medio. La velocidad inicial es cero. Hallar la ley de movimiento del punto. *Respuesta*: $x = a\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right)$.

**140.** $y^{IV}-5y''+4y=0$. *Resp.* $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}$. **141.** $y'''-2y''-y'+2y=0$. *Resp.* $y=C_1e^{2x}+C_2e^{x}+C_3e^{-x}$. **142.** $y'''-3ay''+3a^2y'-a^3y=0$. *Resp.* $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)\,e^{ax}$. **143.** $y^{V}-4y'''=0$. *Resp.* $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{2x}+C_5e^{-2x}$. **144.** $y^{IV}+2y''+9y=0$. *Resp.* $y=(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\operatorname{sen}\sqrt{2}x)\,e^{-x}+(C_3\cos\sqrt{2}x+C_4\operatorname{sen}\sqrt{2}x)\,e^{x}$. **145.** $y^{IV}-8y''+16y=0$. *Resp.* $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3xe^{2x}+C_4xe^{-2x}$. **146.** $y^{IV}+y=0$. *Resp.* $y=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_2\operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_4\operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

**147.** $y^{IV}-a^4y=0$. Hallar la solución general y la solución particular que satisfaga las condiciones iniciales para $x_0=0$, $y=1$, $y'=0$, $y''=-a^2$, $y'''=0$.

*Respuesta*: solución general: $y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}+C_3\cos ax+C_4\operatorname{sen}ax$. Solución particular: $y_0=\cos ax$.

Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas (hallar la solución general):

**148.** $y''-7y'+12y=x$. *Resp.* $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}+\frac{12x+7}{144}$. **149.** $s''-a^2s=t+1$. *Resp.* $s=C_1e^{at}+C_2e^{-at}-\frac{t+1}{a^2}$. **150.** $y''+y'-2y=8\operatorname{sen}2x$. *Resp.* $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}-\frac{1}{5}(6\operatorname{sen}2x+2\cos 2x)$. **151.** $y''-y=5x+2$. *Resp.* $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}-5x-2$. **152.** $s''-2as'+a^2s=e^{t}\ (a\neq 1)$. *Resp.* $s=C_1e^{at}+C_2te^{at}+\frac{e^{t}}{(a-1)^2}$. **153.** $y''+6y'+5y=e^{2x}$. *Resp.* $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-5x}+\frac{1}{21}e^{2x}$. **154.** $y''+9y=6e^{3x}$. *Resp.* $y=C_1\cos 3x+C_2\operatorname{sen}3x+\frac{1}{3}e^{3x}$. **155.** $y''-3y'=2-6x$. *Resp.* $y=C_1+C_2e^{3x}+x^2$. **156.** $y''-2y'+3y=e^{-x}\cos x$. *Resp.* $y=e^{x}(A\cos\sqrt{2}x+B\operatorname{sen}\sqrt{2}x)+\frac{e^{-x}}{41}(5\cos x-4\operatorname{sen}x)$. **157.** $y''+4y=2\operatorname{sen}2x$. *Resp.* $y=A\operatorname{sen}2x+B\cos 2x-\frac{x}{2}\cos 2x$. **158.** $y'''-4y''+5y'-2y=2x+3$. *Resp.* $y=(C_1+C_2x)\,e^{x}+C_3e^{2x}-x-4$. **159.** $y^{IV}-a^4y=5a^4e^{ax}\operatorname{sen}ax$. *Resp.* $y=(C_1-\operatorname{sen}ax)\,e^{ax}+C_2e^{-ax}+C_3\cos ax+C_4\operatorname{sen}ax$. **160.** $y^{IV}+2a^2y''+a^4y=8\cos ax$. *Resp.* $y=(C_1+C_2x)\cos ax+(C_3+C_4x)\operatorname{sen}ax-\frac{x^2}{a^2}\cos ax$.

**161.** Hallar una curva integral de la ecuación $y''+k^2y=0$, que pasa por el punto $M(x_0, y_0)$ y toca en este punto a la recta $y=ax$. *Respuesta*: $y=y_0\cos k(x-x_0)+\frac{a}{k}\operatorname{sen} k(x-x_0)$.

**162.** Hallar la solución de la ecuación $y''+2hy'+n^2y=0$ que satisfaga las condiciones iniciales $y=a$, $y'=C$ para $x=0$. *Respuesta*: para $h<n$, $y=e^{-hx}\left(a\cos\sqrt{n^2-h^2}\,x+\frac{C+ah}{\sqrt{n^2-h^2}}\operatorname{sen}\sqrt{n^2-h^2}\,x\right)$; para $h=n$, $y=e^{-hx}[(C+ah)x+a]$; para $h>n$, $y=\frac{C+a(h+\sqrt{h^2-n^2})}{2\sqrt{h^2-n^2}}\times$ $\times e^{-(h-\sqrt{h^2-n^2})x}-\frac{C+a(h-\sqrt{h^2-n^2})}{2\sqrt{h^2-n^2}}e^{-(h+\sqrt{h^2-n^2})x}$.

**163.** Hallar las soluciones de la ecuación $y''+n^2y=h\operatorname{sen} px$ $(p\neq n)$, que satisfagan las condiciones: $y=a$, $y'=C$ para $x=0$. *Respuesta*: $y=a\cos nx+$ $+\frac{C(n^2-p^2)-hp}{n(n^2-p^2)}\operatorname{sen} nx+\frac{h}{n^2-p^2}\operatorname{sen} px$.

**164.** Un peso de 4 kg está suspendido en un muelle, aumentando la longitud de este a 1 cm. Hallar la ley del movimiento de este peso suponiendo que el extremo superior del muelle efectúa oscilaciones armónicas según la ley $y=$ $=\operatorname{sen}\sqrt{100g}\,t$, donde $y$ es el alargamiento por la vertical.

**Solución.** Sea $x$ la coordenada vertical del peso, medida a partir de la posición de reposo, tenemos:

$$\frac{4}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=-k(x-y-l),$$

donde $l$ es la longitud del muelle en estado libre; $k=400$, lo que se deduce fácilmente de las condiciones iniciales. De aquí:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+100gx=100g\operatorname{sen}\sqrt{100g}\,t+100lg.$$

Busquemos una integral particular de esta ecuación de la forma:

$$t(C_1\cos\sqrt{100g}\,t+C_2\operatorname{sen}\sqrt{100g}\,t)+g,$$

debido a que el primer término del segundo miembro de la ecuación entra en la solución de la ecuación homogénea.

**165.** Según la hipótesis del problema 139, la velocidad inicial es igual a $v_0$ y su dirección es perpendicular a la recta que une los centros. Hallar las trayectorias.

**Solución.** Tomando por el origen de coordenadas el punto medio del segmento entre los centros, las ecuaciones diferenciales del movimiento se escriben en la forma:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=k(C-x)-k(C+x)=-2kx,\qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=-2ky.$$

Las condiciones iniciales para $t=0$ son:

$$x=a;\quad \frac{dx}{dt}=0;\quad y=0;\quad \frac{dy}{dt}=v_0.$$

Integrando, hallamos:

$$x = a\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right), \quad y = v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right).$$

De donde: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 2k}{mv_0^2} = 1$ (elipse).

**166.** Un tubo horizontal gira alrededor de un eje vertical con una velocidad angular $\omega$ constante. Dentro del tubo está colocada una bola que se desliza por él sin fricción. Hallar la ley del movimiento de la bola, si en el instante inicial ésta se encuentra en el eje de rotación y tiene velocidad inicial $v_0$ (a lo largo del tubo).

**Indicación.** La ecuación diferencial del movimiento es $\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 r$.

Las condiciones iniciales: $r = 0$, $\frac{dr}{dt} = v_0$ para $t = 0$.

Integrando, hallamos: $r = \frac{v_0}{2\omega}[e^{\omega t} + e^{-\omega t}]$.

Aplicando el método de la variación de las constantes arbitrarias, integrar las siguientes ecuaciones diferenciales:

**167.** $y'' - 7y' + 6y = \text{sen}\, x$. *Resp.* $y = C_1e^x + C_2e^{6x} + \frac{5\,\text{sen}\, x + 7\cos x}{74}$.

**168.** $y'' + y = \text{sc}\, x$. *Resp.* $y = C_1\cos x + C_2\,\text{sen}\, x + x\,\text{sen}\, x + \cos x \ln\cos x$.

**169.** $y'' + y = \frac{1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$. *Resp.* $y = C_1\cos x + C_2\,\text{sen}\, x - \sqrt{\cos 2x}$.

**Integrar los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:**

**170.** $yy'' = y'^2 + 1$. *Resp.* $y = \frac{1}{2C_1}[e^{C_1(x-C_2)} + e^{-C_1(x-C_2)}]$. **171.** $\frac{x^2\,dy - y^2\,dx}{(x-y)^2} = 0$. *Resp.* $\frac{xy}{x-y} = C$. **172** $y = xy'^2 + y'^2$ *Resp.* $y = (\sqrt{x+1} + C)^2$. Soluciones singulares: $y = 0$; $x + 1 = 0$. **173.** $y'' + y = \text{sc}\, x$. *Resp.* $y = C_1\cos x + C_2\,\text{sen}\, x + x\,\text{sen}\, x + \cos x\ln\cos x$. **174.** $(1 + x^2)\,y' - xy - a = 0$. *Resp.* $y = ax + C\sqrt{1 + x^2}$. 175. $x\cos\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = y\cos\frac{y}{x} - x$. *Resp.* $xe^{\text{sen}\frac{y}{x}} = C$. **176.** $y'' - 4y = e^{2x}\,\text{sen}\, 2x$. *Resp.* $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} - \frac{e^{2x}}{20}(\text{sen}\, 2x + 2\cos 2x)$. **177.** $xy' + y - y^2\ln x = 0$. *Resp.* $(\ln x + 1 + Cx)\,y = 1$. **178.** $(2x + 2y - 1)\,dx + (x + y - 2)\,dy = 0$. *Resp.* $2x + y - 3\ln(x + y + 1) = C$. **179.** $3e^x\,\text{tg}\, y\,dx + (1 - e^x)\,\text{sc}^2\, y\,dy = 0$. *Resp.* $\text{tg}\, y = C(1 - e^x)^3$.

**Integrar los siguientes sistemas de ecuaciones:**

**180.** $\frac{dx}{dy} = y + 1$, $\frac{dy}{dt} = x + 1$. Indicar las soluciones particulares que satisfacen a las condiciones: iniciales $x = -2$, $y = 0$, cuando $t = 0$. *Respuesta:* $y = C_1\cos t + C_2\,\text{sen}\, t$, $x = (C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\,\text{sen}\, t$. Solución particular: $x^* = \cos t - \text{sen}\, t$, $y^* = \cos t$.

181. $\frac{dx}{dt}=x-2y$, $\frac{dy}{dt}=x-y$. Indicar las soluciones particulares que satisfacen las condiciones iniciales: $x=1$, $y=1$, cuando $t=0$, *Respuesta*: $y=C_1\cos t+C_2 \operatorname{sen} t$, $x=(C_1+C_2)\cos t+(C_2-C_1)\operatorname{sen} t$. Solución particular: $x^*=\cos t-\operatorname{sen} t$, $y^*=\cos t$.

182. $\begin{cases} 4\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}+3x=\operatorname{sen} t, \\ \frac{dx}{dt}+y=\cos t. \end{cases}$ *Respuesta*: $x=C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}$, $y=C_1e^{-t}+3C_2e^{-3t}+\cos t$.

183. $\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2}=x, \\ \frac{d^2x}{dt^2}=y. \end{cases}$ *Respuesta*: $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\operatorname{sen} t$, $y=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\operatorname{sen} t$.

184. $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+x=e^t, \\ \frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}=1. \end{cases}$ *Respuesta*: $x=C_1+C_2t+C_3t^2-\frac{1}{6}t^3+e^t$, $y=C_4-(C_1+2C_3)t-$ $-\frac{1}{2}(C_2-1)t^2-\frac{1}{3}C_3t^3+\frac{1}{24}t^4-e^t$

185. $\begin{cases} \frac{dy}{dx}=z-y, \\ \frac{dz}{dx}=-y-3z. \end{cases}$ *Respuesta*: $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$, $z=(C_2-C_1-C_2x)e^{-2x}$.

186. $\begin{cases} \frac{dy}{dx}+z=0, \\ \frac{dz}{dx}+4y=0. \end{cases}$ *Respuesta*: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$, $z=-2(C_1e^{2x}-C_2e^{-2x})$.

187. $\begin{cases} \frac{dy}{dx}+2y+z=\operatorname{sen} x, \\ \frac{dz}{dx}-4y-2z=\cos x. \end{cases}$ *Respuesta*: $y=C_1+C_2x+2\operatorname{sen} x$, $z=-2C_1-C_2(2x+1)-$ $-3\operatorname{sen} x-2\cos x$.

188. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=y+z, \\ \frac{dy}{dt}=x+z, \\ \frac{dz}{dt}=x+y. \end{cases}$ *Respuesta*: $x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}$, $y=C_3e^{-t}+C_2e^{2t}$, $z=-(C_1+C_3)e^{-t}+C_2e^{2t}$.

189. $\begin{cases} \frac{dy}{dx}=1-\frac{1}{z}, \\ \frac{dz}{dx}=\frac{1}{y-x}. \end{cases}$ *Respuesta*: $z=C_2e^{C_1x}$, $y=x+\frac{1}{C_1C_2}e^{-C_1x}$.

**190.** $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{yz}, \\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{x}{y^2}. \end{cases}$ *Respuesta*: $\dfrac{z}{y}=C_1$, $zy^2-\dfrac{3}{2}x^2=C_2$.

Analizar la estabilidad de la solución $x=0$, $y=0$ para los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

**191.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x-3y, \\ \dfrac{dy}{dt}=5x+6y. \end{cases}$ *Respuesta*: Inestable.

**192.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-4x-10y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x-2y. \end{cases}$ *Respuesta*: Estable.

**193.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=12x+18y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-8x-12y. \end{cases}$ *Respuesta*: Inestable.

**194.** Hallar los valores aproximados de la solución de la ecuación $y'=y^2+x$, que satisface a la condición inicial $y=1$, cuando $x=0$. Hallar los valores de la solución para los siguientes valores de $x$ iguales a 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. *Respuesta*: $y_{x=0,5}=2,114$.

**195.** Hallar el valor aproximado $y_{x=1,4}$ de la solución de la ecuación $y'+\dfrac{1}{x}y=e^x$, que satisface a las condiciones iniciales $y=1$ cuando $x=1$. Comparar el resultado obtenido con la solución exacta.

**196.** Hallar los valores aproximados $x_{t=1,4}$ e $y_{t=1,4}$ de las soluciones del sistema de ecuaciones $\dfrac{dx}{dt}=y-x$, $\dfrac{dy}{dt}=-x-3y$, que satisfacen a las condiciones iniciales $y=1$, cuando $t=1$ y $x=0$. Comparar los valores obtenidos con los exactos.

**CAPITULO XIV**

# INTEGRALES MULTIPLES

## § 1. INTEGRAL DOBLE

Sea en el plano $Oxy$ un dominio cerrado*) $D$, limitado por una curva L.

Sea dada en el dominio $D$ una función continua

$$z = f(x, y).$$

Dividamos el dominio $D$ mediante curvas arbitrarias en $n$ partes:

$$\Delta s_1, \ \Delta s_2, \ \Delta s_3, \ \ldots, \ \Delta s_n$$

(fig. 276) las que llamaremos dominios parciales o elementos. Para no introducir nuevos símbolos designemos por $\Delta s_1, \ldots, \Delta s_n$ no sólo a los propios elementos, sino también sus áreas. En cada $\Delta s_i$ (en su interior o en la frontera), elijamos un punto $P_i$; entonces obtenemos $n$ puntos:

$$P_1, \ P_2, \ \ldots, \ P_n.$$

Sean $f(P_1), f(P_2), \ldots, f(P_n)$ los valores de la función en los puntos elegidos; formemos la suma de productos de la forma $f(P_i)\Delta s_i$:

$$V_n = f(P_1)\Delta s_1 + f(P_2)\Delta s_2 + \ldots + f(P_n)\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i, \qquad (1)$$

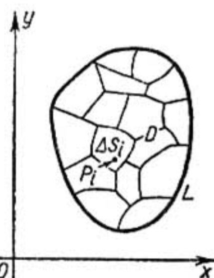



Fig. 276

que se llama *suma integral* de la función $f(x, y)$ en el dominio $D$.

Si $f \geqslant 0$ en el dominio $D$, entonces cada sumando $f(P_i)\Delta s_i$ se puede representar geométricamente como el volumen de un cilindro elemental de base $\Delta s_i$ y de altura $f(P_i)$.

*) Un dominio $D$ se llama *cerrado*, si está limitado por una curva cerrada y se considera que los puntos, ubicados en la frontera, pertenecen al dominio $D$.

Así, $V_n$ es la suma de los volúmenes de los cilindros elementales indicados, es decir, el volumen de un cierto cuerpo «escalonado» (fig. 277).

Examinemos una sucesión arbitraria de las sumas integrales, formadas con ayuda de la función $f(x, y)$ en el dominio dado $D$:

$$V_{n_1}, V_{n_2}, \ldots, V_{n_k}, \ldots \tag{2}$$

para diferentes métodos de división del dominio $D$ en las partes $\Delta s_i$. Supongamos que el diámetro máximo de los elementos $\Delta s_i$ tiende a cero, cuando $n_k \to \infty$. En este caso resulta válido el siguiente teorema que citemos aquí sin demostración.

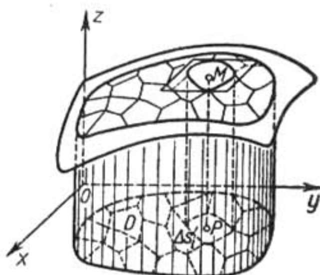


Fig. 277

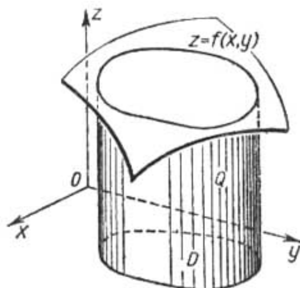


Fig. 278

**Teorema 1.** *Siendo $f(x, y)$ una finción continua en el dominio cerrado $D$, la sucesión (2) de las sumas integrales (1) tiene un límite, si el diámetro máximo de $\Delta s_i$ tiende a cero, mientras que $n \to \infty$. Este límite siempre es el mismo para cualquier sucesión de la forma (2), es decir, no depende del modo de división del dominio en los elementos $\Delta s_i$ ni de la elección del punto $P_i$ dentro del dominio parcial $\Delta s_i$.*

Este límite se llama *integral doble* de la función $f(x, y)$ extendida por el dominio $D$ y se designa así:

$$\iint_D f(P)\, ds \quad \text{ó} \quad \iint_D f(x, y)\, dx\, dy,$$

es decir,

$$\lim_{\text{diám}\, \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\, \Delta s_i = \iint_D (x, y)\, dx\, dy.$$

Aquí $D$ se llama *dominio de integración*.

Si es $f(x, y) \geqslant 0$, la integral doble de $f(x, y)$ extendida por el dominio $D$ es igual al volumen $Q$ de un cuerpo limitado por la superficie $z = f(x, y)$, el plano $z = 0$ y la superficie cilíndrica, cuyas generatrices son paralelas al eje $Oz$ y la directriz es la frontera del dominio $D$ (fig. 278).

Examinemos ahora los siguientes teoremas acerca de la integral doble.

**Teorema 2.** *La integral doble de la suma de dos funciones* $\varphi(x, y) + \psi(x, y)$, *extendida por un dominio D es igual a la suma de las integrales dobles extendidas por este dominio D de cada una de las dos funciones por separado*:

$$\iint\limits_D [\varphi(x, y) + \psi(x, y)]\, ds = \iint\limits_D \varphi(x, y)\, ds + \iint\limits_D \psi(x, y)\, ds.$$

**Teorema 3.** *El factor constante se puede sacar fuera del signo de la integral doble*:

*si* $a = \text{const}$, *tenemos*:

$$\iint\limits_D a\varphi(x, y)\, ds = a \iint\limits_D \varphi(x, y)\, ds.$$

La demostración de estos dos teoremas se efectúa de modo análogo al que hemos practicado para demostrar teoremas correspondientes de la integral definida (véase tomo I, § 3, cap, XI).

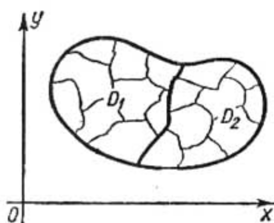



*Fig. 279*

**Teorema 4.** *Si el dominio D está dividido en dos dominios parciales* $D_1$ *y* $D_2$, *sin poseer puntos interiores comunes, y la función* $f(x, y)$ *es continua en todos los puntos del dominio D, entonces*:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\, dx\, dy. \qquad (3)$$

**Demostración:** La suma integral por el dominio $D$ se puede representar en la forma (fig. 279)

$$\sum_D f(P_i)\, \Delta s_i = \sum_{D_1} f(P_i)\, \Delta s_i + \sum_{D_2} f(P_i)\, \Delta s_i, \qquad (4)$$

donde la primera suma contiene términos correspondientes a los elementos del dominio $D_1$, y la segunda, términos correspondientes a los elementos del dominio $D_2$. En efecto, como la integral doble

no depende del modo de dividir el dominio $D$, dividámoslo de manera que la frontera común de $D_1$ y $D_2$ sea también una frontera de los elemetos $\Delta s_i$. Pasando en la igualdad (4) al límite, cuando $\Delta s_i \to 0$, obtenemos la igualdad (3). Es evidente que este teorema es válida para cualquier número de sumandos.

## § 2. CALCULO DE LA INTEGRAL DOBLE

Sea un dominio $D$ del plano $Oxy$ tal que toda recta paralela a uno de los ejes de coordenadas (por ejemplo, al eje $Oy$) y que pasa por un punto **interior***) del dominio, corta su frontera en dos puntos $N_1$ y $N_2$ (fig. 280).

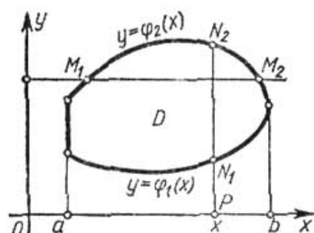



*Fig. 280*

Supongamos que en el caso examinado el dominio $D$ está limitado por las curvas: $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ y las rectas, $x = a$, $x = b$; que

$$\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x), \quad a < b;$$

y además las funciones $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ son continuas en el segmento $[a, b]$. Convengamos llamar tal dominio *regular en la dirección del eje Oy*. De modo semejante se determina el dominio *regular en la dirección del eje Ox*.

Un dominio regular en las direcciones de ambos ejes de coordenadas llamemos simplemente *dominio regular*. La figura 280 da un ejemplo de dominio regular $D$.

Sea $f(x, y)$ una función continua en el dominio $D$.

Examinemos la expresión

$$I_D = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx,$$

la que llamaremos integral *iterada* de segundo orden de la función $f(x, y)$, extendida por el dominio $D$. En esta expresión al principio se calcula la integral entre paréntesis. La integración se realiza respecto a $y$, considerando $x$ constante. Como resultado de la integración obtenemos una función continua**) de $x$:

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

*) El punto interior es un punto del dominio que no se encuentra en su frontera.

**) Aquí no se demuestra que la función $\Phi(x)$ es continua.

Integramos la última función respecto a $x$ entre los límites desde $a$ hasta $b$:

$$I_D = \int_a^b \Phi(x)\,dx.$$

En definitiva obtenemos un número constante.

**Ejemplo 1.** Hallar la integral iterada de segundo orden

$$I_D = \int_0^1 \left( \int_0^{x^2} (x^2+y^2)\,dy \right) dx.$$

**Solución.** Calculemos al principio la integral interior, (entre paréntesis):

$$\Phi(x) = \int_0^{x^2} (x^2+y^2)\,dy = \left( x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Big|_0^{x^2} = x^2 x^2 + \frac{(x^2)^3}{3} = x^4 + \frac{x^6}{3}.$$

Integrando la función obtenida desde 0 hasta 1 hallamos:

$$\int_0^1 \left( x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \left( \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{3\cdot 7} \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = \frac{26}{105}.$$

Determinemos el dominio $D$. En el caso dado $D$ es un dominio limitado por las líneas (fig. 281):

$$y=0, \quad x=0, \quad y=x^2, \quad x=1.$$

A veces puede ocurrir que el dominio $D$ es tal que una de las funciones $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ no puede ser dada por una sola expre-

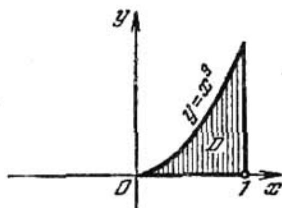


*Fig. 281*

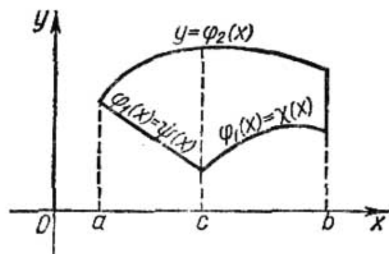


*Fig. 282*

sión analítica en todo el intervalo de la variación de $x$ (desde $x = a$ hasta $x = b$). Sea, por ejemplo, $a < c < b$, y

$\varphi_1(x) = \psi(x)$ en el segmento $[a, c]$,

$\varphi_1(x) = \chi(x)$ en el segmento $[c, b]$,

donde $\psi(x)$ y $\chi(x)$ son funciones dadas analíticamente (fig. 282).

En este caso escribamos la integral iterada de la manera siguiente:

$$\int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx =$$

$$= \int_a^c \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx + \int_c^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx =$$

$$= \int_a^c \left( \int_{\psi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx + \int_c^b \left( \int_{\chi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

La primera de estas igualdades está escrita en virtud de la propiedad conocida de la integral definida y la segunda, por que en el segmento $[a, c]$ tenemos $\varphi_1(x) \equiv \psi(x)$ y en el segmento $[c, b]$, $\varphi_1(x) \equiv \chi(x)$.

Si la función $\varphi_2(x)$ es dada por diferentes expresiones analíticas en varias partes del segmento $[a, b]$, la inscripción de la integral iterada de segundo orden será análoga.

Determinemos ciertas propiedades de la integral iterada de segundo orden.

**Propiedad 1.** *Si un dominio $D$ regular en la dirección del eje $Oy$ lo dividimos en dos dominios $D_1$ y $D_2$, mediante una recta paralela al eje $Oy$ o al eje $Ox$, la integral iterada de segundo orden $I_D$ extendida por el dominio $D$ será igual a la suma de integrales semejantes extendidas por los dominios $D_1$ y $D_2$, es decir,*

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}. \tag{1}$$

**Demostración.** a) Supongamos que la recta $x = c$ $(a < c < b)$ divide el dominio $D$ en dos dominios*) $D_1$ y $D_2$ regulares en la dirección del eje $Oy$. Entonces

$$I_D = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^b \Phi(x)\, dx = \int_a^c \Phi(x)\, dx + \int_c^b \Phi(x)\, dx =$$

$$= \int_a^c \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx + \int_c^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = I_{D_1} + I_{D_2}.$$

b) Supongamos que la recta $y = h$ divide el dominio $D$ en dos dominios $D_1$ y $D_2$ regulares en dirección del eje $Oy$, de modo tal como se expone en la figura 283. Designemos por $M_1$ y $M_2$ los puntos de intersección de la recta $y = h$ con la frontera $L$ de $D$. Designemos las abscisas de estos puntos por $a_1$ y $b_1$.

*) El hecho de que una parte de la frontera de $D_1$ (también del dominio $D_2$) es un tramo de recta vertical no impide que este dominio sea regular en la dirección del eje $Oy$. En efecto, para que un dominio sea regular, es preciso sólo que cada recta vertical pasante por un punto interior de éste, tenga no más de dos puntos comunes con la frontera.

El dominio $D_1$ está limitado por las curvas continuas:

1) $y = \varphi_1(x)$;

2) la curva $A_1M_1M_2B$, cuya ecuación escribimos convencionalmente en la forma

$$y = \varphi_1^*(x),$$

teniendo en cuenta que $\varphi_1^*(x) = \varphi_2(x)$ cuando $a \leqslant x \leqslant a_1$ y $b_1 \leqslant \leqslant x \leqslant b$, y que

$$\varphi_1^*(x) = h, \quad \text{cuando} \quad a_1 \leqslant x \leqslant b_1;$$

3) las rectas $x = a$, $x = b$.

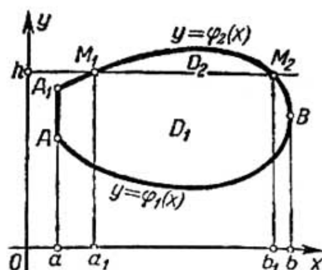



*Fig. 283*

El dominio $D_2$ está limitado por las curvas

$$y = \varphi_1^*(x), \; y = \varphi_2(x), \quad \text{donde} \quad a_1 \leqslant x \leqslant b_1.$$

Aplicando a la integral interior el teorema sobre la descomposición del intervalo de integración, escribamos la identidad siguiente:

$$I_D = \int_a^b \Big( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \Big) dx =$$

$$= \int_a^b \Big( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x, y)\, dy + \int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \Big) dx =$$

$$= \int_a^b \Big( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x, y)\, dy \Big) dx + \int_a^b \Big( \int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \Big) dx.$$

Descompongamos la última integral en tres integrales aplicando el mismo teorema a la integral exterior:

$$\int\limits_a^b \Big(\int\limits_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\Big)dx=\int\limits_a^{a_1}\Big(\int\limits_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\Big)dx+$$
$$+\int\limits_{a_1}^{b_1}\Big(\int\limits_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\Big)dx+\int\limits_{b_1}^{b}\Big(\int\limits_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\Big)dx;$$

como $\varphi_1^*(x)=\varphi_2(x)$ en los segmentos $[a,\ a_1]$ y $[b_1,\ b]$, las integrales primera y tercera son idénticamente iguales a cero. Por eso:

$$I_D=\int\limits_a^b\Big(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x,\ y)\,dy\Big)dx+\int\limits_{a_1}^{b_1}\Big(\int\limits_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\Big)dx.$$

Aquí la primera integral es una integral iterada de segundo orden por el dominio $D_1$ y la segunda, por el dominio $D_2$. Por consiguiente,

$$I_D=I_{D_1}+I_{D_2}.$$

La demostración será semejante cualquiera que sea la posición de la secante $M_1M_2$. Si la recta $M_1M_2$ divide a $D$ en tres o, incluso, en mayor número de dominios, obtenemos una relación, análoga a la (1) con el número correspondiente de los sumandos en el segundo miembro.

**Corolario.** Cada uno de los dominios obtenidos podemos dividir de nuevo en dominios regulares en la dirección del eje $Oy$ mediante

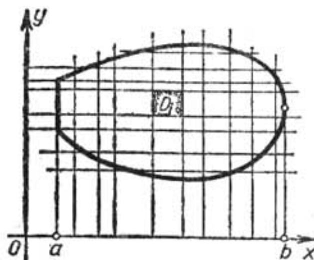



*Fig. 284*

una paralela a $Oy$ o a $Ox$, y aplicar a éstos la igualdad (1). Por consiguiente, se puede dividir $D$ en cualquier número de dominios regulares mediante paralelas a los ejes de coordenadas

$$D_1,\ D_2,\ D_3,\ \ldots\ D_i,$$

en este caso también será válida la afirmación de que la integral iterada de segundo orden extendida por el dominio $D$ es igual a la suma de estas integrales extendidas por los dominios parciales, es decir (fig. 284):

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2} + I_{D_3} + \dots + I_{D_l}. \qquad (2)$$

**Propiedad 2. (Evaluación de la integral iterada de segundo orden).** *Sean $m$ y $M$ los valores mínimo y máximo de la función $f(x, y)$ en el dominio $D$. Designemos por $S$ el área del dominio $D$. En este caso tenemos la correlación*

$$mS \leqslant \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx \leqslant MS. \qquad (3)$$

**Demostración.** Evaluemos la integral interior, designándola por $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \leqslant \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} M\, dy = M[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)].$$

Obtenemos:

$$I_D = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx \leqslant \int_a^b M[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\, dx = MS,$$

es decir

$$I_D \leqslant MS. \qquad (3')$$

Análogamente tenemos:

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \geqslant \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} m\, dx = m[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)],$$

$$I_D = \int_a^b \Phi(x)\, dx \geqslant \int_a^b m[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\, dx = mS,$$

es decir,

$$I_D \geqslant mS. \qquad (3'')$$

De las desigualdades (3′) y (3″) se deduce la correlación (3):

$$mS \leqslant I_D \leqslant MS.$$

En el párrafo siguiente aclaremos el significado geométrico de este teorema.

**Propiedad 3 (Teorema de la media).** *La integral iterada de segundo orden $I_D$ de una función continua $f(x, y)$, extendida por un dominio $D$ del área $S$ es igual al producto de $S$ por el valor de la función en cierto punto $P$ del dominio $D$, es decir.*

$$\int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = f(P)\, S. \qquad (4)$$

**Demostración.** De la correlación (3) obtenemos:

$$m \leqslant \frac{1}{S} I_D \leqslant M.$$

El número $\frac{1}{S} I_D$ está comprendido entre las valores máximo y mínimo de la función $f(x, y)$ en el dominio $D$. En virtud de la continuidad de la función $f(x, y)$, ésta toma en cierto punto $P$ del dominio $D$ el valor igual a $\frac{1}{S} I_D$, es decir.

$$\frac{1}{S} I_D = f(P),$$

de donde:

$$I_D = f(P)\, S. \tag{5}$$

## § 3. CALCULO DE LA INTEGRAL DOBLE (CONTINUACION)

**Teorema.** *La integral doble de una función continua $f(x, y)$, extendida por un dominio regular $D$, es igual a la integral iterada de segundo orden de esta función extendida por $D$, es decir,**)

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \Big( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \Big) dx.$$

**Demostración.** Dividamos el dominio $D$ por las paralelas a los ejes de coordenadas en $n$ dominios regulares (rectangulares):

$$\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ \ldots,\ \Delta s_n.$$

En virtud de la propiedad 1 [fórmula (2)] del párrafo anterior tenemos:

$$I_D = I_{\Delta s_1} + I_{\Delta s_2} + \ldots + I_{\Delta s_n} = \sum_{i=1}^{n} I_{\Delta s_i}. \tag{1}$$

Transformemos cada sumando del segundo miembro utilizando el teorema de la media para la integral iterada de segundo orden:

$$I_{\Delta s_i} = f(P_i)\, \Delta s_i.$$

Entonces, la igualdad (1) toma la forma

$$I_D = f(P_1)\, \Delta s_1 + f(P_2)\, \Delta s_2 + \ldots + f(P_n)\, \Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\, \Delta s_i, \tag{2}$$

*) De nuevo suponemos que el dominio $D$ es regular en la dirección del eje $Oy$ y limitado por las curvas $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$.

donde $P_i$ es un punto en $\Delta s_i$. A la derecha tenemos una suma integral para la función $f(x, y)$ extendida por el dominio $D$. Del teorema sobre la existencia de la integral doble se deduce que el límite de esta suma existe y es igual a la integral doble de la función

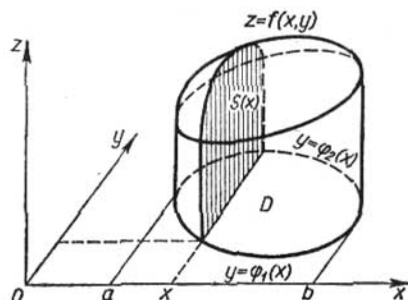



*Fig. 285*

$f(x, y)$ por $D$, cuando $n \to \infty$ y el diámetro máximo de los dominios parciales $\Delta s_i$ tiende a cero.

El valor numérico de la integral iterada de segundo orden $I_D$ del primer miembro de la igualdad (2) no depende de $n$. Por tanto, pasando al límite en la igualdad (2), obtenemos:

$$I_D = \lim_{\text{diám } \Delta s_i \to 0} \sum f(P_i)\, \Delta s_i = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy$$

ó

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = I_D. \tag{3}$$

Esrcibiendo la expresión de la integral iterada de segundo orden $I_D$ en forma más detallada, en definitiva obtenemos:

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \Big( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \Big) dx. \tag{4}$$

**Observación 1.** Cuando $f(x, y) \geqslant 0$, la fórmula (4) toma una interpretación geométrica ilustrativa. Analicemos un cuerpo limitado por la superficie $z = f(x, y)$, el plano $z = 0$ y la superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al eje $Oz$ y la directriz sigue la frontera del dominio $D$ (fig. 285). Calculemos el volumen $V$ de este cuerpo. Hemos indicado ya que el volumen de este cuerpo es igual a la integral doble de la función $f(x, y)$ extendida por el dominio $D$:

$$V = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy. \tag{5}$$

Calculemos ahora el volumen de este cuerpo utilizando los resultados del § 4, cap. XII, tomo I sobre el cálculo del volumen de un cuerpo según las áreas de secciones paralelas. Tracemos el plano secante $x = \text{const}$ $(a < x < b)$, que corta el cuerpo. Calculemos el área $S(x)$ de la figura obtenida en la sección $x = \text{const}$. Esta

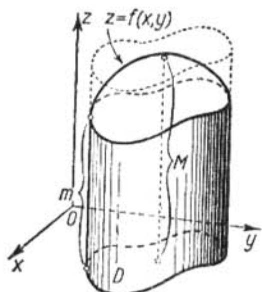



Fig. 286

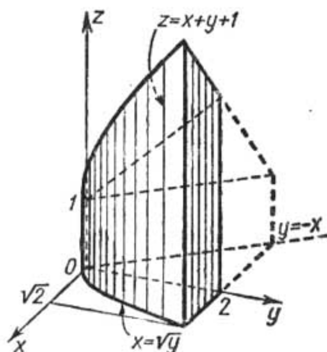



Fig. 287

figura es un trapecio curvilíneo limitado por las líneas $z = f(x, y)$ $(x = \text{const})$, $z = 0$, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$. Por consiguiente, esta área se expresará mediante la integral

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy. \qquad (6)$$

Conociendo las áreas de las secciones paralelas, es fácil hallar el volumen del cuerpo:

$$V = \int_a^b S(x)\, dx,$$

o, sustituyendo $S(x)$ en esta fórmula por su expresión de (6), tenemos:

$$V = \int_a^b \Big( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \Big) dx. \qquad (7)$$

Los primeros miembros de las fórmulas (5) y (7) son iguales por tanto son iguales también sus segundos miembros:

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \Big( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \Big) dx.$$

No es difícil aclarar ahora el significado geométrico del teorema sobre la evaluación de la integral iterada de segundo orden (la propiedad 2 del párrafo anterior): el volumen $V$ de un cuerpo limitado

por la superficie $z = f(x, y)$, el plano $z = 0$ y la superficie cilíndrica, cuya directriz sigue la frontera del dominio $D$ es superior que el volumen de un cilindro de base $S$ y altura $m$ e inferior que el volumen de un cilindro de base $S$ y altura $M$ ($m$ y $M$ son los valores mínimo y máximo de la función $z = f(x, y)$ en el dominio $D$ (fig. 286). Esto se deduce de que la integral iterada de segundo orden $I_D$ es igual al volumen $V$ de este cuerpo.

**Ejemplo 1.** Calcular la integral doble $\iint\limits_D (4-x^2-y^2)\,dx\,dy$, si el dominio $D$ está limitado por las rectas $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=\frac{3}{2}$.

**Solución.** En virtud de la fórmula, tenemos:

$$V=\int\limits_0^{3/2}\left[\int\limits_0^1 (4-x^2-y^2)\,dx\right]dy=\int\limits_0^{3/2}\left[4x-y^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 dy=$$

$$=\int\limits_0^{3/2}\left(4-y^2-\frac{1}{3}\right)dy=\left(4y-\frac{y^3}{3}-\frac{1}{3}y\right)\Bigg|_0^{3/2}=\frac{35}{8}.$$

**Ejemplo 2.** Calcular la integral doble de la función $f(x, y)=1+x+y$, extendida por el dominio limitado por las líneas: $y=-x$, $x=\sqrt{y}$, $y=2$, $z=0$ (fig. 287).

**Solución.**

$$V=\int\limits_0^2\left[\int\limits_{-y}^{\sqrt{y}}(1+x+y)\,dx\right]dy=\int\limits_0^2\left[x+xy+\frac{x^2}{2}\right]_{-y}^{\sqrt{y}}dy=$$

$$=\int\limits_0^2\left[\left(\sqrt{y}+y\sqrt{y}+\frac{y}{2}\right)-\left(-y-y^2+\frac{y^2}{2}\right)\right]dy=$$

$$=\int\limits_0^2\left[\sqrt{y}+\frac{3y}{2}+y\sqrt{y}-\frac{y^2}{2}\right]dy=$$

$$=\left[\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{3y^2}{4}+\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{y^3}{6}\right]_0^2=\frac{44}{15}\sqrt{2}+\frac{5}{3}.$$

**Observación 2.** Supongamos que el dominio $D$ regular en la dirección del eje $Ox$ está limitado por las líneas

$$x=\psi_1(y),\quad x=\psi_2(y),\ y=c,\quad y=d,$$

siendo $\psi_1(y)\leqslant\psi_2(y)$ (fig. 288).

Es evidente, que en este caso tenemos:

$$\iint_D (x,\ y)\,dx\,dy = \int_c^d \Big( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)\,dx \Big) dy. \tag{8}$$

Para calcular una integral doble es preciso representarla en forma de una integral iterada de segundo orden. Esto se puede hacer

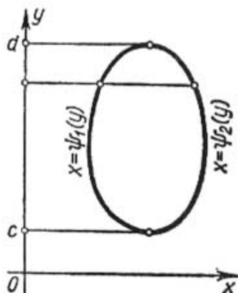



*Fig. 288*

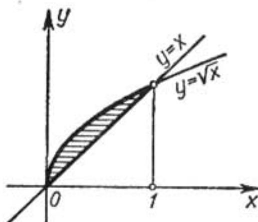



*Fig. 289*

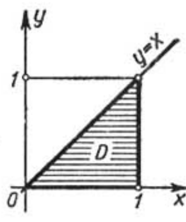



*Fig. 290*

por dos procedimientos, utilizando la fórmula (4) o la (8). En cada caso concreto, para calcular la integral doble elijamos una u otra fórmula según la forma del dominio $D$ o del integrando.

**Ejemplo 3.** Cambiar el orden de integración en la integral

$$I = \int_0^1 \left( \int_x^{\sqrt{x}} f(x,\,y)\,dy \right) dx.$$

**Solución.** El dominio de integración está limitado por la recta $y=x$ y la parábola $y=\sqrt{x}$ (fig. 289).

Toda paralela al eje $Ox$ corta la frontera del dominio no más que en dos puntos. Por tanto, se puede calcular la integral según la fórmula (8) poniendo

$$\psi_1(y) = y^2, \quad \psi_2(y) = y, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1;$$

entonces:

$$I = \int_0^1 \Big( \int_{y^2}^{y} f(x,\,y)\,dx \Big)\,dy.$$

**Ejemplo 4.** Calcular $\iint_D e^{\frac{y}{x}}\,ds$, si el dominio $D$ es un triángulo limitado por las rectas $y=x$, $y=0$, $x=1$ (fig. 290).

**Solución.** Sustituyamos la integral doble dada por una integral iterada de segundo orden, utilizando la fórmula (4). (Si usáramos la fórmula (8), tendríamos que integrar la función $e^{\frac{y}{x}}$ respecto a $x$; pero esta integral no se expresa mediante las funciones elementales):

$$\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}\, ds = \int_0^1 \left( \int_0^x e^{\frac{y}{x}}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left( xe^{\frac{y}{x}} \right)_0^x dx =$$

$$= \int_0^1 x(e-1)\, dx = (e-1)\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2} = 0{,}859\ \ldots$$

**Observación 3.** Si el dominio $D$ no es regular en la dirección del eje $Ox$, ni en la del eje $Oy$ (es decir, si existen rectas verticales y horizontales que pasan por los puntos interiores del dominio y cortan la frontera del dominio en más dos puntos), entonces no

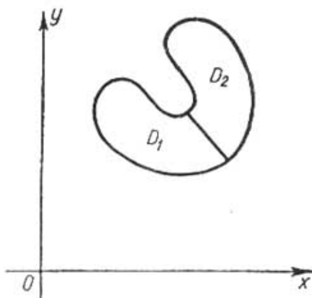



*Fig. 291*

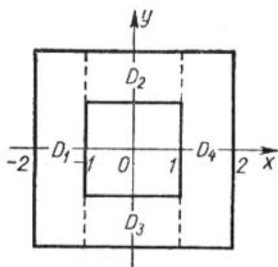



*Fig. 292*

podemos presentar la integral doble extendida por este dominio en la forma de una integral iterada de segundo orden. Si logramos dividir el dominio irregular $D$ en un número finito de dominios regulares $D_1, D_2, \ldots, D_n$ en dirección del eje $Ox$ ó $Oy$ entonces, al calcular la integral doble por cada uno de estos dominios parciales (con ayuda de la integral iterada de segundo orden) y al sumar los resultados, obtenemos la integral buscada extendida por el dominio $D$.

En la figura 291 se muestra el modo de dividir el dominio irregular $D$ en dos dominios regulares $D_1$ y $D_2$.

**Ejemplo 5.** Calcular la integral doble

$$\iint\limits_D e^{x+y}\, ds$$

extendida por el dominio $D$, encerrado entre dos cuadrados con el centro en el origen de coordenadas y los lados paralelos a los ejes de coordenadas, si cada lado del cuadrado interior es igual a 2 y el del exterior a 4 (fig. 292).

**Solución.** El dominio $D$ es irregular. Sin embargo, las rectas $x = -1$ y $x = 1$ lo dividen en cuatro dominios regulares $D_1, D_2, D_3, D_4$. Por eso:

$$\iint\limits_D e^{x+y}\,ds = \iint\limits_{D_1} e^{x+y}\,ds + \iint\limits_{D_2} e^{x+y}\,ds + \iint\limits_{D_3} e^{x+y}\,ds + \iint\limits_{D_4} e^{x+y}\,ds.$$

Representando cada una de estas integrales en forma de una integral iterada de segundo orden, hallamos:

$$\iint\limits_D e^{x+y}\,ds = \int_{-2}^{-1}\Big(\int_{-2}^{2} e^{x+y}\,dy\Big)\,dx + \int_{-1}^{1}\Big(\int_{1}^{2} e^{x+y}\,dy\Big)\,dx +$$
$$+ \int_{-1}^{1}\Big(\int_{-2}^{-1} e^{x+y}\,dy\Big)\,dx + \int_{1}^{2}\Big(\int_{-2}^{2} e^{x+y}\,dy\Big)\,dx =$$
$$= (e^2 - e^{-2})(e^{-1} - e^{-2}) + (e^2 - e)(e - e^{-1}) + (e^{-1} - e^{-2})(e - e^{-1}) +$$
$$+ (e^2 - e^{-2})(e^2 - e) = (e^3 - e^{-3})(e - e^{-1}) = 4 \operatorname{senh} 3 \operatorname{senh} 1.$$

**Observación 4.** En adelante escribamos la integral iterada de segundo orden

$$I_D = \int_a^b \Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\Big)\,dx,$$

omitiendo los paréntesis de la integral interior, es decir, en la forma:

$$I_D = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\,dx.$$

Aquí, (igual que en el caso, en que se ponen los paréntesis) convengamos que la primera integración se realiza respecto a la variable, cuya diferencial está escrita primera y después, respecto a la otra variable, cuya diferencial está escrita en el segundo lugar. Notemos, sin embargo, que esta regla no está generalmente aceptada. En algunas obras está adoptado el procedimiento contrario: al principio, la integración se realiza respecto a la variable, cuya diferencial ocupa el último lugar*).

## § 4. CALCULO DE AREAS Y VOLUMENES CON AYUDA DE INTEGRALES DOBLES

**1. Volumen.** Como hemos visto en § 1, el volumen $V$ de un cuerpo, limitado por una superficie $z = f(x,\ y)$, donde $f(x,\ y)$ es una función no negativa, el plano $z = 0$ y la superficie cilíndrica,

*) A veces se utiliza también la anotación siguiente:

$$I_D = \int_a^b \Big(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,\ y)\,dy\Big)\,dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,\ y)\,dy.$$

cuyas generatrices son paralelas al eje $Oz$, y la directriz sigue la frontera del dominio $D$, es igual a la integral doble de la función $f(x, y)$ extendida por $D$:

$$V = \iint_D f(x, y)\, ds.$$

**Ejemplo 1.** Calcular el volumen de un cuerpo limitado por las superficies $x=0$, $y=0$, $x+y+z=1$, $z=0$ (fig. 293).

**Solución.**

$$V = \iint_D (1-x-y)\, dy\, dx,$$

donde $D$ (rayado en la figura 293) es el dominio en forma triangular del plano $Oxy$ limitado por las rectas $x=0$, $y=0$, $x+y=1$.

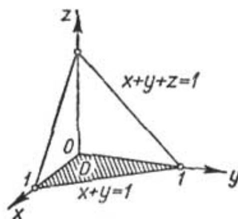



*Fig. 293*

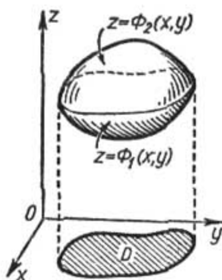



*Fig. 294*

Poniendo los límites en la integral doble, calculemos el volumen:

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[(1-x)\, y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2\, dx = \frac{1}{6}.$$

Así, $V = \frac{1}{6}$ unidades cúbicas.

**Observación 1.** Si el cuerpo, cuyo volumen se busca, está limitado por arriba y por debajo por las superficies $z = \Phi_2(x, y) \geqslant 0$ y $z = \Phi_1(x, y) \geqslant 0$, respectivamente, siendo $D$ la proyección de ambas superficies sobre el plano $Oxy$, entonces, el volumen $V$ de este cuerpo es igual a la diferencia entre los volúmenes de dos cuerpos «cilíndricos», el primero de los cuales tiene $D$ como base inferior y la superficie $z = \Phi_2(x, y)$, como base superior, y el segundo tiene $D$ también como base inferior y la superficie $z = \Phi_1(x, y)$, como base superior (fig. 294).

Por eso, el volumen $V$ es igual a la diferencia de dos integrales dobles:

$$V = \iint_D \Phi_2(x, y)\, ds - \iint_D \Phi_1(x, y)\, ds,$$

ó

$$V = \iint_D [\Phi_2(x, y) - \Phi_1(x, y)]\, ds. \qquad (1)$$

Es fácil demostrar que la fórmula (1) es válida no sólo cuando $\Phi_1(x, y)$ y $\Phi_2(x, y)$ son funciones no negativas, sino también, cuando $\Phi_1(x, y)$ y $\Phi_2(x, y)$ son funciones continuas arbitrarias que satisfacen la correlación:

$$\Phi_2(x, y) \geqslant \Phi_1(x, y).$$

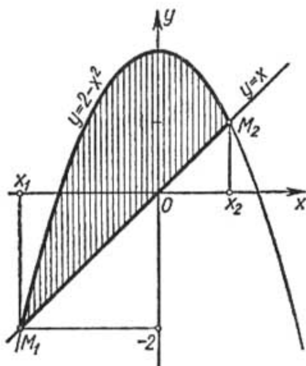


*Fig. 295*

**Observación 2.** Si la función $f(x, y)$ cambia de signo en el dominio $D$, dividamos a éste en dos dominios: 1) dominio $D_1$, donde $f(x, y) \geqslant 0$; 2) dominio $D_2$, donde $f(x, y) \leqslant 0$. Supongamos que $D_1$ y $D_2$ son tales que por estos dominios existen las integrales dobles. En este caso la integral por el dominio $D_1$ será positiva e igual al volumen del cuerpo dispuesto por encima del plano $Oxy$. La integral extendida por $D_2$ será negativa e igual por su valor absoluto al volumen del cuerpo dispuesto por debajo del plano $Oxy$. Por consiguiente, la integral extendida por el dominio $D$ expresará la diferencia de los volúmenes correspondientes.

**2. Cálculo del área de un dominio plano.** Si formamos una suma integral para la función $f(x, y) \equiv 1$ por el dominio $D$, obtenemos el área

$$S = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta s_i,$$

cualquiera que sea la división. Pasando al límite en el segundo miembro de la igualdad, obtenemos:

$$S = \iint_D dx\, dy.$$

Si el dominio $D$ es regular (véase, por ejemplo, fig. 280), el área $S$ se expresará mediante la integral interada de segundo orden

$$S = \int_a^b \Big( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \Big) dx.$$

Después de la integración de la integral entre paréntesis, tenemos:

$$S=\int_a^b [\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\ dx.$$

(véase § 1, cap. XII, tomo I).

**Ejemplo 2.** Calcular el área de un dominio limitado por las curvas

$$y=2-x^2,\ y=x.$$

**Solución.** Determinemos los puntos de intersección de las curvas dadas (fig. 295). Las ordenadas de dos curvas son iguales en el punto de intersección, es decir,

$$x=2-x^2,$$

de donde: $x^2+x-2=0$, $x_1=-2$, $x_2=1$.
Hemos obtenido dos puntos de intersección:

$$M_1(-2,\ -2),\ M_2(1,\ 1).$$

Por tanto, el área buscada es:

$$S=\int_{-2}^{1}\left(\int_{x}^{2-x^2} dy\right) dx=\int_{-2}^{1}(2-x^2-x)\,dx=\left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1}=\frac{27}{6}.$$

## § 5. INTEGRAL DOBLE EN COORDENADAS POLARES

Sea dado en el sistema de coordenadas polares $\theta$, $\rho$, un dominio $D$ tal, que todo rayo*) pasante por un punto interior de $D$ corta la frontera del dominio no más que en dos puntos. Supongamos también que el dominio $D$ está limitado por las curvas $\rho=\Phi_1(\theta)$, $\rho=\Phi_2(\theta)$ y los rayos $\theta=\alpha$, y $\theta=\beta$, siendo $\Phi_1(\theta)\leqslant\Phi_2(\theta)$ y $\alpha<\beta$ (fig. 296). Diremos que un dominio tal es *regular*.

Sea dada en el dominio $D$ una función continua de las coordenadas $\theta$ y $\rho$:

$$z=F(\theta,\ \rho).$$

Dividamos arbitrariamente $D$ en los dominios parciales $\Delta s_1$, $\Delta s_2$, . . . . . ., $\Delta s_n$.

Formemos la suma integral:

$$V_n=\sum_{k=1}^{n} F(P_k)\,\Delta s_k, \tag{1}$$

donde $P_k$ es un punto en $\Delta s_k$.

Del teorema sobre la existencia de la integral doble se deduce que cuando el diámetro máximo de $\Delta s_k$ tiende a cero, la suma inte-

*) Llamemos *rayo* a toda semirrecta que parte del origen de coordenadas, es decir, del polo $P$.

gral (1) tiene un límite $V$. Según la definición, este límite $V$ es la integral doble de la función $F(\theta, \rho)$ extendida por el dominio $D$:

$$V = \iint_D F(\theta, \rho)\, ds. \tag{2}$$

Calculemos aquí esta integral doble.

Como el límite de la suma integral no depende del modo de dividir $D$ en los dominios parciales $\Delta s_k$, podemos dividirlo, para la comodidad, mediante rayos $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$, ..., ..., $\theta = \theta_n$ (donde $\theta_0 = \alpha$, $\theta_n = \beta$, $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n$) y las circunferencias concéntricas $\rho = \rho_0$, $\rho = \rho_1$, ..., $\rho = \rho_m$, [donde $\rho_0$ *es igual al valor mínimo* de la función $\Phi_1(\theta)$ y $\rho_m$, al valor máximo de $\Phi_2(\theta)$ en el intervalo $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$; $\rho_0 < \rho_1 < \ldots < \rho_m$].

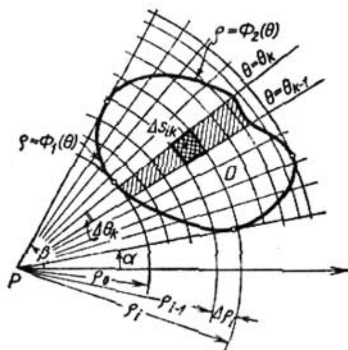



*Fig. 296*

Designemos por $\Delta s_{ik}$ el dominio parcial limitado por las líneas $\rho = \rho_{i-1}$, $\rho = \rho_i$, $\theta = \theta_{k-1}$, $\theta = \theta_k$.

*Sean aquí tres tipos de los dominios parciales* $\Delta s_{ik}$: 1) los que no se cortan por la frontera y se sitúan dentro del dominio $D$; 2) los que no se cortan por la frontera y se sitúan fuera del dominio $D$; 3) los que se cortan por la frontera del dominio $D$.

La suma de los términos, correspondientes a los dominios parciales cortados, tiene por límite cero, cuando $\Delta\theta_k \to 0$ y $\Delta\rho_i \to 0$, por lo que estos sumandos no se toman en cuenta. Los dominios parciales $\Delta s_{ik}$ que se encuentran fuera de $D$ y no entran en la suma integral no nos interesan. Por consiguiente, se puede escribir la suma integral en la forma:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_i F(P_{ik})\, \Delta s_{ik}\right],$$

donde $P_{ik}$ es un punto arbitrario de $\Delta s_{ik}$.

El signo de suma doble significa aquí, que al principio sumamos por el índice $i$, considerando $k$ constante (es decir, sumamos todos los términos que corresponden a los dominios parciales comprendidos entre dos rayos vecinos*). El signo de suma externo significa

*) Observemos que al sumar por el índice $i$, éste no tomará obligatoriamente todos los valores de 1 a $m$, puesto que no todos los dominios parciales situados entre los rayos $\theta = \theta_k$ y $\theta = \theta_{k+1}$ pertenecen a $D$.

que nosotros unimos todas las sumas obtenidas durante la primera adición (es decir, sumamos por el índice $k$).

Hallemos la expresión del área del dominio parcial $\Delta s_{ik}$, que no se corta por la frontera de $D$. El área es igual a la diferencia de las áreas de dos sectores:

$$\Delta s_{ik} = \frac{1}{2}(\rho_i + \Delta\rho_i)^2 \Delta\theta_k - \frac{1}{2}\rho_i^2 \Delta\theta_k = \left(\rho_i + \frac{\Delta\rho_i}{2}\right) \Delta\rho_i \Delta\theta_k$$

ó

$$\Delta s_{ik} = \rho_i^* \Delta\rho_i \Delta\theta_k, \quad \text{donde} \quad \rho_i < \rho_i^* < \rho_i + \Delta\rho_i.$$

Así, la suma integral tiene la forma*)

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_i F(\theta_k^*, \rho_i^*)\, \rho_i^* \Delta\rho_i \Delta\theta_k\right],$$

donde $P(\theta_k^*, \rho_i^*)$ es un punto de $\Delta s_{ik}$. Saquemos el factor $\Delta\theta_k$ fuera del signo de la suma interior (esto se permite, puesto que es un factor común para todos los términos de esta suma):

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_i F(\theta_k^*, \rho_i^*)\, \rho_i^* \Delta\rho_i\right] \Delta\theta_k.$$

Supongamos que $\Delta\rho_i \to 0$ y $\Delta\theta_k$ queda constante. En este caso, la expresión entre paréntesis tenderá a la integral

$$\int_{\Phi_1(\theta_k^*)}^{\Phi_2(\theta_k^*)} F(\theta_k^*, \rho)\, \rho\, d\rho.$$

Suponiendo ahora que $\Delta\theta_k \to 0$, en definitiva, obtenemos**):

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} F(\theta, \rho)\, \rho\, d\rho \right) d\theta. \tag{3}$$

---

*) Podemos analizar la suma integral en esta forma, puesto que el límite de la suma no depende de la posición del punto dentro del dominio parcial.

**) Nuestra deducción de la fórmula (3) no es rigurosa, al obtenerla, al principio, hemos téndido $\Delta\rho_i$ a cero, conservando $\Delta\theta_k$ invariable y sólo después hemos tendido $\Delta\theta_k$ a cero. Esto no corresponde completamente a la definición de integral doble la que consideramos como el límite de una suma integral, cuando los diámetros máximos de los dominios parciales tienden a cero (es decir, cuando $\Delta\theta_k$ y $\Delta\rho_i$ tienden simultáneamente a cero). Sin embargo, a pesar de la falta de rigurosidad en la demostración, el resultado es justo (es decir, la fórmula (3) es válida). La demostración rigurosa podría ser efectuada mediante el método utilizado para el examen de la integral doble en las coordenadas rectangulares. Notemos, que esta fórmula será deducida también en § 6, partiendo de otras consideraciones (como caso particular de la fórmula más general para transformar las coordenadas dentro de la integral doble).

La fórmula (3) sirve para calcular integrales dobles en las coordenadas polares.

Si la primera integración se realiza por $\theta$, y la segunda, por $\rho$, obtenemos la fórmula (fig. 297):

$$V=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\Big(\int_{\omega_1(\rho)}^{\omega_2(\rho)}F(\theta,\ \rho)\,d\theta\Big)\rho\,d\rho. \qquad (3')$$

Supongamos que es preciso calcular la integral doble de la función $f(x,\ y)$, dada en coordenadas rectangulares y extendida por el dominio $D$:

$$\iint_D f(x,\ y)\ dx\ dy.$$

Si $D$ es un dominio regular en coordenadas polares $\theta$, $\rho$, el cálculo de la integral dada se puede reducir a la determinación de una inte-

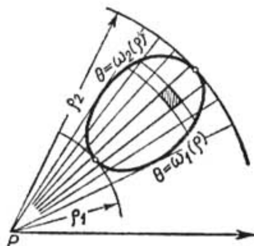



Fig. 297

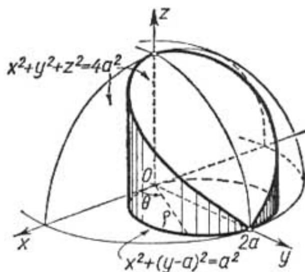



Fig. 298

gral iterada de segundo orden en coordenadas polares.

En efecto, puesto que

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\operatorname{sen}\theta,$$

$$f(x,\ y)=f[\rho\cos\theta,\ \rho\operatorname{sen}\theta]=F(\theta,\ \rho),$$

por tanto, tenemos

$$\iint_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\int_\alpha^\beta\Big(\int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)}f[\rho\cos\theta,\ \rho\operatorname{sen}\theta]\,\rho\,d\rho\Big)\,d\theta. \qquad (4)$$

**Ejemplo 1.** Calcular el volumen $V$ del cuerpo limitado por la superficie esférica

$$x^2+y^2+z^2=4a^2$$

y el cilindro

$$x^2+y^2-2ay=0.$$

**Solución.** Como el dominio de integración se puede tomar, en este ejemplo, la base de un cilindro $x^2+y^2-2ay=0$, es decir, un círculo de radio $a$ y centro en el punto $(0,a)$. La ecuación de este círculo se puede escribir en la forma: $x^2+(y-a)^2=a^2$ (fig. 298). Calculemos la cuarta parte del volumen

$V$, es decir, la parte dispuesta en el primer octante. Entonces, en calidad del dominio de integración debemos tomar un semicírculo, cuyas fronteras son determinadas por las ecuaciones:

$$x=\varphi_1(y)=0, \quad x=\varphi_2(y)=\sqrt{2ay-y^2},$$
$$y=0, \quad y=2a.$$

El integrando es

$$z=f(x, y)=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{4}V=\int_0^{2a}\left(\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dx\right)dy.$$

Transformemos la integral obtenida para las coordenadas polares $\theta$, $\rho$:

$$x=\rho\cos\theta, \quad y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Determinemos los límites de integración. Para esto escribamos la ecuación de circunferencia dada en coordenadas polares: puesto que

$$x^2+y^2=\rho^2,$$
$$y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

tenemos:

$$\rho^2-2a\rho\,\mathrm{sen}\,\theta=0$$

ó

$$\rho=2a\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

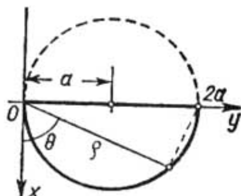


Fig. 299

Por consiguiente, las fronteras del dominio en coordenadas polares (fig. 299) se determinan por las ecuaciones:

$$\rho=\Phi_1(\theta)=0, \quad \rho=\Phi_2(\theta)=2a\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \alpha=0, \quad \beta=\frac{\pi}{2},$$

el integrando tiene la forma

$$F(\theta, \rho)=\sqrt{4a^2-\rho^2}.$$

Por consiguiente, obtenemos:

$$\frac{V}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2a\,\mathrm{sen}\,\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{(4a^2-\rho^2)^{3/2}}{3}\right]_0^{2a\,\mathrm{sen}\,\theta}d\theta=$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(4a^2-4a^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta)^{3/2}-(4a^2)^{3/2}]\,d\theta=$$

$$=\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\theta)\,d\theta=\frac{4}{9}a^3(3\pi-4).$$

**Ejemplo 2.** Calcular la integral de Poisson:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

**Solución:** Calculemos al principio la integral $I_R=\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, donde el dominio de integración $D$ es un círculo

$$x^2+y^2=R^2$$

(fig. 300).

Pasando a las coordenadas polares $\theta$, $\rho$, tenemos:

$$I_R=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\right)d\theta=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-\rho^2}\Big|_0^R d\theta=\pi\,(1-e^{-R^2}).$$

Si hacemos que el radio $R$ tienda al infinito (es decir, si ampliamos indefinidamente el dominio de integración), obtenemos la así llamada inte-

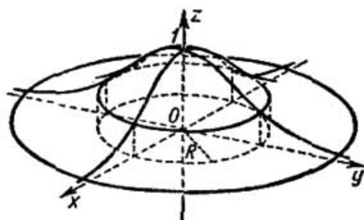



*Fig. 300*

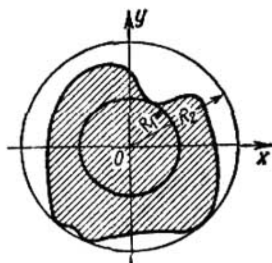



*Fig. 301*

gral múltiple impropia:

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\right)d\theta=\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\right)d\theta=\lim_{R\to\infty}\pi\,(1-e^{-R^2})=\pi.$$

Demostremos, que la integral $\iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ tiende al límite $\pi$, cuando el dominio $D'$ de forma arbitraria se amplía de modo tal, que todo punto del plano se encuentre, por fin, en $D'$ y permanezca en él (anotemos convencionalmente esta ampliación del dominio $D'$ por la correlación $D'\to\infty$).

Sean $R_1$ y $R_2$ las distancias mínima y máxima de la frontera del dominio $D'$ a partir del origen de coordenadas (fig. 301).

Como la función $e^{-x^2-y^2}>0$ por dondequiera, las desigualdades

$$I_{R_1}\leqslant\iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy\leqslant I_{R_2}$$

ó

$$\pi\,(1-e^{-R_1^2})\leqslant\iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy\leqslant\pi\,(1-e^{-R_2^2})$$

son válidas.

Como $D' \to \infty$, es evidente que $R_1 \to \infty$ y $R_2 \to \infty$ y los miembros extremos de la desigualdad tienden a un mismo límite $\pi$. Por consiguiente, a este límite tiende también el miembro medio, es decir,

$$\lim_{D' \to \infty} \iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi. \tag{5}$$

Supongamos, en particular, que el dominio $D'$ es un cuadrado de lado igual a $2a$ y centro en el origen de coordenadas; entonces:

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-a}^{a}\left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\right)dy.$$

Saquemos ahora el factor $e^{-y^2}$ fuera del signo de la integral interior (podemos hacerlo, puesto que $e^{-y^2}$ no depende de la variable de integración $x$). Entonces

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-a}^{a} e^{-y^2}\left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right)dy.$$

Pongamos $\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx = B_a$. Este es un número constante (dependiente sólo de $a$); por esto

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-a}^{a} e^{-y^2}B_a\,dy = B_a\int_{-a}^{a} e^{-y^2}\,dy.$$

Pero, la última integral es también igual a $B_a$ $\left(\text{puesto que } \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx = \int_{-a}^{a} e^{-y^2}\,dy\right)$; por consiguiente,

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = B_aB_a = B_a^2.$$

Pasemos en esta ecuación al límite, haciendo que $a$ tienda al infinito (en este caso $D'$ se amplía indefinidamente):

$$\lim_{D' \to \infty} \iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{a \to \infty} B_a^2 = \lim_{a \to \infty}\left[\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right]^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right]^2.$$

Pero, según lo demostrado (véase (5)),

$$\lim_{D' \to \infty} \iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi.$$

Por tanto:

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right]^2 = \pi$$

ó

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Esta integral se encuentra a menudo en la teoría de probabilidades y en la estadística. Notemos, que es imposible calcular esta integral directamente (con ayuda de la integral indefinida), puesto que la primitiva de $e^{-x^2}$ no se expresa mediante las funciones elementales.

## § 6. SUSTITUCION DE VARIABLES EN UNA INTEGRAL DOBLE (CASO GENERAL)

Sea dado en el plano $Oxy$ un dominio $D$ limitado por la curva $L$. Supongamos también que las coordenadas $x$ e $y$ son las funciones de las nuevas variables $u$ y $v$:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \tag{1}$$

donde las funciones $\varphi(u, v)$ y $\psi(u, v)$ son uniformes, continuas

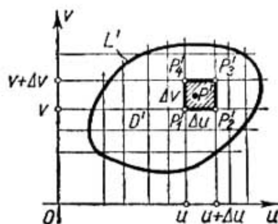



Fig. 302

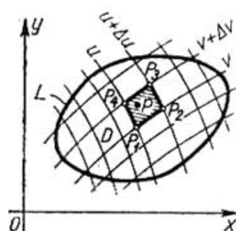



Fig. 303

y tienen las derivadas continuas en cierto dominio $D'$ que será definido abajo. En este caso, según la fórmula (1), a cada par de valores $u$ y $v$ corresponde un solo par de valores $x$ e $y$. Supongamos, ahora, que las funciones $\varphi$ y $\psi$ son tales que, si damos a $x$ e $y$ los valores determinados en el dominio $D$, entonces, según las fórmulas (1) determinemos los valores definidos de $u$ y $v$.

Analicemos el sistema de coordenadas rectangulares $Ouv$ (fig. 302). De lo expuesto arriba se deduce, que a todo punto $P(x, y)$ en el plano $Oxy$ (fig. 303) corresponde uniformemente un punto $P'(u, v)$ del plano $Ouv$ de coordenadas $u$, $v$ definidas por las fórmulas (1). Los números $u$ y $v$ se llaman coordenadas *curvilíneas* del punto $P$.

Si un punto describe en el plano $Oxy$ la curva cerrada $L$ que limita el dominio $D$, entonces en el plano $Ouv$ el punto correspondiente describirá una curva cerrada $L'$ que limita un cierto dominio $D'$; además, a cada punto de $D'$ le corresponde un punto de $D$.

Por consiguiente, las fórmulas (1) establecen una *correspondencia biunívoca entre los puntos de los dominios D y D', o, como se dice también, representan biunívocamente a D en D'.*

Analicemos en $D'$ una recta $u = \text{const}$. En general, por las fórmulas (1) hallemos que en el plano $Oxy$ le corresponde una cierta curva. Del modo igual a toda recta $v = \text{const}$ del plano $Ouv$ le corresponde una cierta curva en el plano $Oxy$.

Mediante rectas $u = \text{const}$ y $v = \text{const}$ dividamos el dominio $D'$ en los dominios parciales rectangulares (no tomamos en consideración los rectángulos que tocan la frontera de $D'$). Las curvas correspondientes dividen el dominio $D$ en ciertos cuadriláteros curvilíneos (fig. 303).

Analicemos en el plano $Ouv$ un rectángulo $\Delta s'$, limitado por las rectas $u = \text{const}$, $u + \Delta u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $v + \Delta v = \text{const}$ y el cuadrilátero curvilíneo $\Delta s$ que le corresponde en el plano $Oxy$. Las áreas de estos dominios parciales designémoslas por $\Delta s'$ y $\Delta s$, respectivamente. Es evidente, que:

$$\Delta s' = \Delta u \Delta v.$$

Hablando en general, las áreas $\Delta s$ y $\Delta s'$ son diferentes.

Sea dada una función continua

$$z = f(x, y)$$

en un dominio $D$.

A todo valor de la función $z = f(x, y)$ del dominio $D$, corresponde un mismo valor de la función $z = F(u, v)$ en $D'$, donde

$$F(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)].$$

Examinemos las sumas integrales de la función $z$ extendidas por el dominio $D$. Evidentemente, se verifica la igualdad siguiente:

$$\Sigma f(x, y)\Delta s = \Sigma F(u, v)\Delta s. \tag{2}$$

Calculemos $\Delta s$, es decir, el área del cuadrilátero curvilíneo $P_1P_2P_3P_4$ en el plano $Oxy$ (véase fig. 303).

Determinemos las coordenadas de sus vértices:

$$\left.\begin{aligned}
&P_1(x_1, y_1), \; x_1 = \varphi(u, v), && y_1 = \psi(u, v),\\
&P_2(x_2, y_2), \; x_2 = \varphi(u + \Delta u, v), && y_2 = \psi(u + \Delta u, v),\\
&P_3(x_3, y_3), \; x_3 = \varphi(u + \Delta u, v + \Delta v), && y_3 = \psi(u + \Delta u, v + \Delta v),\\
&P_4(x_4, y_4), \; x_4 = \varphi(u, v + \Delta v), && y_4 = \psi(u, v + \Delta v).
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Al calcular el área del cuadrilátero curvilíneo $P_1P_2P_3P_4$, consideremos que las líneas $P_1P_2$, $P_2P_3$, $P_3P_4$, $P_4P_1$ son, por pares, rectas paralelas; además, sustituyamos los incrementos de las funciones por sus diferenciales correspondientes. De este modo, menos-

preciemos las infinitesimales de orden superior en comparación con las $\Delta u$, $\Delta v$. En este caso, las fórmulas (3) toman la forma:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \varphi(u, v), & y_1 &= \psi(u, v),\\
x_2 &= \varphi(u, v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u, & y_2 &= \psi(u, v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u,\\
x_3 &= \varphi(u, v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v, & y_3 &= \psi(u, v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v,\\
x_4 &= \varphi(u, v) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v, & y_4 &= \psi(u, v) + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v.
\end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

Hechas las suposiciones mencionadas, podemos considerar el cuadrilátero curvilíneo $P_1P_2P_3P_4$ como un paralelógramo. Su área $\Delta s$ es aproximadamente igual al área duplicada del triángulo $P_1P_2P_3$, y se determina mediante la aplicación de la fórmula correspondiente de la geometría analítica:

$$\begin{aligned}
\Delta s &\approx \left|(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)\right| =\\
&= \left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\right)\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v\right)\right| =\\
&= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta u\Delta v - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u\Delta v\right| = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right|\Delta u\Delta v =\\
&= \left\|\begin{matrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{matrix}\right\|\Delta u\Delta v.
\end{aligned}$$

Las líneas verticales secundarias exteriores de la determinante significan que ésta se toma por su valor absoluto. Introduzcamos la designación:

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix} = I.$$

Por consiguiente,

$$\Delta s \approx |I|\,\Delta s'. \tag{4}$$

La determinante $I$ se llama *determinante funcional* o *jacobiano* (por el nombre del matemático alemán Jacobi) de las funciones $\varphi(u, v)$ y $\psi(u, v)$.

La igualdad (4) es sólo aproximada, puesto que, al calcular el área de $\Delta s$, hemos menospreciado las infinitesimales de orden superior. Sin embargo, cuanto menores son las dimensiones de los domi-

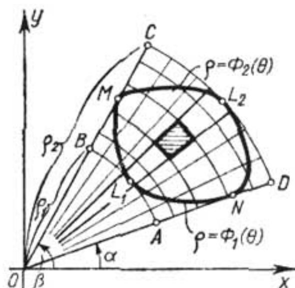



*Fig. 304*

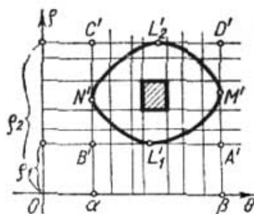



*Fig. 305*

nios parcialas $\Delta s$ y $\Delta s'$, tanto más precisa será la igualdad. Pasando al límite, la igualdad comienza a ser precisa, cuando los diámetros de los dominios parciales $\Delta s$ y $\Delta s'$ tienden a cero:

$$|I| = \lim_{\text{diám } \Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta s'}.$$

Apliquemos ahora la igualdad obtenida al cálculo de la integral doble. En virtud de la igualdad (2), podemos escribir:

$$\sum f(x, y)\,\Delta s \approx \sum F(u, v)\,|I|\,\Delta s'$$

(la suma integral del segundo miembro se extiende por el dominio $D'$). Pasando al límite, cuando diám $\Delta s' \to 0$, obtenemos la igualdad exacta:

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} F(u, v)\,|I|\,du\,dv. \tag{5}$$

Esta es *la fórmula de transformación de las coordenadas dentro de la integral doble*. Ella permite reducir el cálculo de una integral doble extendida por el dominio $D$ al cálculo de una integral doble extendida por el dominio $D'$, lo que puede simplificar el problema.

La primera demostración rigurosa de esta fórmula pertenece al distinguido matemático ruso M. V. Ostrogradski.

**Observación.** El paso de las coordenadas rectangulares a las polares, examinado en el párrafo anterior, es un caso particular

del cambio de variables en una integral doble. Aquí tenemos $u = \theta$, $v = \rho$:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta.$$

El arco $AB$ ($\rho = \rho_1$) del plano $Oxy$ (fig. 304) está representado por la recta $A'B'$ en el plano $O\theta\rho$ (fig. 305); el arco $DC$ ($\rho = \rho_2$) del plano $Oxy$, por la recta $D'C'$ en el plano $O\theta\rho$.

Las rectas $AD$ y $BC$ del plano $Oxy$ están representadas por las rectas $A'D'$ y $B'C'$ en el plano $O\theta\rho$. Las curvas $L_1$ y $L_2$ se representan por las curvas $L_1'$ y $L_2'$.

Calculemos el jacobiano de la transformación de las coordenadas cartesianas $x$ e $y$ en las polares $\theta$ y $\rho$:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ \rho\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} = -\rho \operatorname{sen}^2\theta - \rho\cos^2\theta = -\rho.$$

Por consiguiente, $|I| = \rho$, entonces

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_\alpha^\beta \left( \int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} F(\theta, \rho)\, \rho\, d\rho \right) d\theta.$$

Esta es la fórmula obtenida en el párrafo anterior.

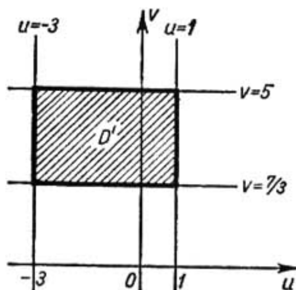



*Fig. 306*

**Ejemplo.** Calcular la integral doble

$$\iint_D (y - x)\, dx\, dy$$

donde $D$ es el dominio del plano $Oxy$ limitado por las rectas

$$y = x + 1, \quad y = x - 3, \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{9},$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 5.$$

El cálculo directo de esta integral doble sería una tarea dificultosa, pero un cambio simple de variables permite reducirla a la integral por un rectángulo, cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas.

Pongamos

$$u = y - x, \quad v = y + \frac{1}{3}x. \tag{6}$$

Entonces, las rectas $y = x + 1$, $y = x - 3$ serán representadas respectivamente por las rectas $u = 1$, $u = -3$ en el plano $Ouv$; las rectas $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x + 5$, por las $v = \frac{7}{3}$, $v = 5$.

Por tanto, el dominio dado $D$ será representado por el dominio rectangular $D'$ expuesto en la fig. 306. Nos queda calcular el jacobiano de transformación. Con este fin expresemos $x$ e $y$ en función de $u$ y $v$. Resolviendo el sistema de ecuaciones (6), obtenemos:

$$x = -\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v; \quad y = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v.$$

Por consiguiente,

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{9}{16} - \frac{3}{16} = -\frac{3}{4},$$

y el valor absoluto de jacobiano es $|I| = \frac{3}{4}$. Por eso,

$$\iint\limits_D (y-x)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} \left[\left(+\frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v\right) - \left(-\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v\right)\right]\frac{3}{4}\,du\,dv =$$

$$= \iint\limits_{D_1} \frac{3}{4}u\,du\,dv = \int\limits_{\frac{7}{3}}^{5} \int\limits_{-3}^{1} \frac{3}{4}u\,du\,dv = -18.$$

## § 7. CALCULO DE LAS AREAS DE SUPERFICIES

Supongamos que es preciso calcular el área de una superficie limitada por una curva $\Gamma$ (fig. 307); sea dada la superficie por una

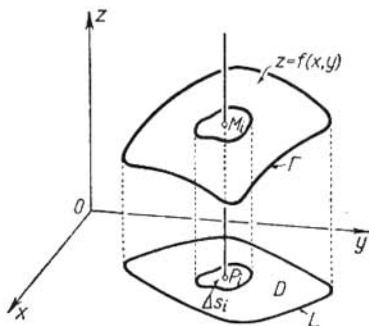



*Fig. 307*

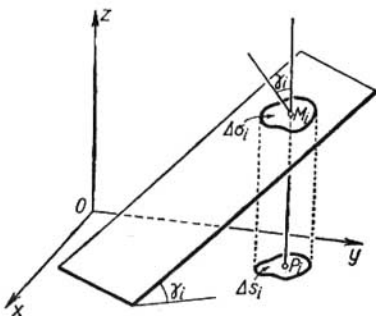



*Fig. 308*

ecuación $z = f(x, y)$, donde la función $f(x, y)$ es continua y tiene las derivadas parciales continuas.

Sea $L$ la proyección de la curva $\Gamma$ sobre el plano $Oxy$. Designemos por $D$ el dominio del plano $Oxy$, limitado por $L$.

Dividamos arbitrariamente el dominio $D$ en $n$ dominios parciales o elementales $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. Tomemos en cada dominio parcial $\Delta s_i$ un punto arbitrario $P_i (\xi_i, \eta_i)$. Al punto $P_i$ corresponderá un punto en la superficie

$$M_i [\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)].$$

Por el punto $M_i$ tracemos un plano tangente a la superficie. Su ecuación será:

$$z - z_i = f'_x(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f'_y(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i) \qquad (1)$$

(véase § 6, cap. IX, tomo I). En este plano elijamos un dominio parcial $\Delta\sigma_i$ tal que se proyecta sobre el plano $Oxy$ en forma del dominio elemental $\Delta s_i$. Consideremos la suma de todos los dominios elementales $\Delta\sigma_i$:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i.$$

El límite $\sigma$ de esta suma, cuando el máximo de los diámetros de $\Delta\sigma_i$ tiende a cero, llamemos *área de la superficie*, es decir, según la definición, pongamos:

$$\sigma = \lim_{\text{diám } \Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i. \qquad (2)$$

Calculemos ahora el área de la superficie. Designemos por $\gamma_i$ el ángulo formado por el plano tangente y el plano $Oxy$. Basándonos en la fórmula conocida de la geometría analítica, podemos escribir (fig. 308):

$$\Delta s_i = \Delta\sigma_i \cos\gamma_i$$

ó

$$\Delta\sigma_i = \frac{\Delta s_i}{\cos\gamma_i}. \qquad (3)$$

El ángulo $\gamma_i$ también está formado por el eje $Oz$ y la normal al plano (1). Por eso, en virtud de la ecuación (1) y de la fórmula correspondiente de la geometría analítica tenemos:

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(\xi_i, \eta_i) + f'^2_y(\xi_i, \eta_i)}}.$$

Por consiguiente,

$$\Delta\sigma_i = \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_i, \eta_i) + f'^2_y(\xi_i, \eta_i)}\, \Delta s_i.$$

Poniendo esta expresión en la fórmula (2), obtenemos:

$$\sigma = \lim_{\text{diám } \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_i, \eta_i) + f'^2_y(\xi_i, \eta_i)}\, \Delta s_i.$$

Como el límite de la suma integral del segundo miembro de esta última igualdad es, según la definición, la integral doble

$$\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

en difinitiva, tenemos:

$$\sigma=\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy. \qquad (4)$$

Esta es la fórmula que permite calcular el área de la superficie $z = f(x, y)$.

Si la ecuación de la superficie es dada en la forma

$x = \mu(y, z)$ o en la forma $y = \chi(x, z)$,

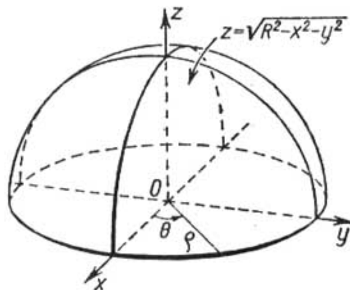



*Fig. 309*

entonces las fórmulas correspondientes, para calcular las superficies, tienen la forma:

$$\sigma=\iint\limits_{D'} \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz, \qquad (3')$$

$$\sigma=\iint\limits_{D''} \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dx\,dz, \qquad (3'')$$

donde $D'$ y $D''$ son los dominios de los planos $Oyz$ y $Oxz$ en los cuales se proyecta la superficie dada.

**Ejemplo 1.** Calcular la superficie $\sigma$ de la esfera

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

**Solución.** Calculemos la superficie de la mitad superior de la esfera

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

(fig. 309). En este caso tenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Por tanto,

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

El dominio de integración está determinado por la condición

$$x^2+y^2\leqslant R^2.$$

Así, en virtud de la fórmula (4), tenemos:

$$\frac{1}{2}\sigma=\int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dy\right)dx.$$

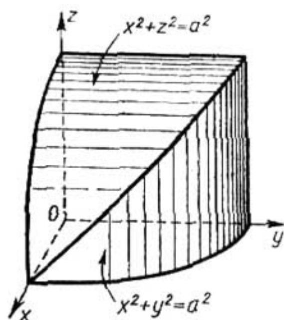



*Fig. 310*

Para calcular la integral doble obtenida, pasemos a las coordenadas polares. En estas coordenadas la ecuación de la frontera del dominio de integración es $\rho=R$. Por consiguiente,

$$\sigma=2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\,\rho\,d\rho\right)d\theta=$$

$$=2R\int_0^{2\pi}\left[-\sqrt{R^2-\rho^2}\right]_0^R d\theta=2R\int_0^{2\pi}R\,d\theta=4\pi R^2.$$

**Ejemplo 2.** Hallar el área de la parte de la superficie del cilindro

$$x^2+y^2=a^2$$

la cual se recorta por otro cilindro

$$x^2+z^2=a^2.$$

**Solución.** En la figura 310 está expuesta la parte octava de la superficie buscada. La ecuación de la superficie es $y=\sqrt{a^2-x^2}$; por eso,

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}};\quad \frac{\partial y}{\partial z}=0;$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

El dominio de integración es una cuarta parte del círculo, es decir, se determina por las condiciones siguientes:

$$x^2+z^2\leqslant a^2,\quad x\geqslant 0,\quad z\geqslant 0.$$

Por consiguiente,

$$\frac{1}{8}\sigma=\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dz\right)dx=a\int_0^a\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2}}\Bigg|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a\int_0^a dx=a^2,$$

$$\sigma=8a^2.$$

## § 8. DENSIDAD DE DISTRIBUCION DE LA MATERIA Y LA INTEGRAL DOBLE

Supongamos que cierta materia está distribuida en el dominio $D$ de modo que cada unidad del área $D$ contiene una cantidad determinada de ésta. Se trata aquí de la distribución de la masa, aunque nuestros razonamientos siguen en vigor cuando hablemos de la distribución de carga eléctrica, cantidad de calor, etc.

Examinemos un dominio parcial arbitrario $\Delta s$ de $D$. Sea $\Delta m$ la masa de la materia distribuida en este dominio parcial. Entonces, la razón $\frac{\Delta m}{\Delta s}$ se llama densidad superficial media de la materia en $\Delta s$.

Suponemos ahora que el dominio parcial $\Delta s$ disminuye, reduciéndose, finalmente, al punto $P(x, y)$. Examinemos el límite $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta s}$. Si este límite existe, él dependerá, en caso general, de la posición del punto $P$, es decir, de sus coordenadas $x$ e $y$, representando en sí cierta función $f(P)$ del punto $P$. Este límite lo llamaremos *densidad superficial* de la materia en el punto $P$:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta s} = f(P) = f(x, y). \tag{1}$$

Así, la densidad superficial es una función $f(x, y)$ de las coordenadas del punto examinado en el dominio.

Supongamos, ahora, inversamente que en el dominio $D$ está dada la densidad superficial de cierta materia como una función continua $f(P) = f(x, y)$; es preciso determinar la cantidad total de la materia $M$ que se contiene en $D$. Dividamos el dominio en los dominios parciales $\Delta s_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, y en cada de ellos tomemos un punto $P_i$. Entonces, $f(P_i)$ es la densidad superficial en el punto $P_i$.

El producto $f(P_i)\,\Delta s_i$ nos da la cantidad de la materia contenida en $\Delta s_i$ (con la precisión de hasta las infinitesimales de orden superior), mientras que la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta s_i$$

expresa aproximadamente la cantidad total de la substancia distribuida en el dominio D. Pero ésta es la suma integral para la función $f(P)$ en $D$. El valor preciso lo obtenemos pasando al límite, cuando $\Delta s_i \to 0$.

Por consiguiente*),

$$M = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta s_i = \iint_D f(P)\,ds = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy, \qquad (2)$$

es decir, la cantidad total de materia en el dominio $D$ es igual a la integral doble por $D$ de la densidad $f(P) = f(x, y)$ de esta substancia.

**Ejemplo.** Determinar la masa de una placa redonda de radio $R$, si la densidad superficial $f(x, y)$ del material en cada punto $P(x, y)$ es proporcional a la distancia del punto $(x, y)$ al centro de la placa, es decir, si

$$f(x, y) = k\sqrt{x^2+y^2}.$$

**Solución.** Según la fórmula (2), tenemos

$$M = \iint_D k\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

donde el dominio de integración $D$ es el círculo $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

Pasando a las coordenadas polares, obtenemos

$$M = k\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \rho\rho\,d\rho\right)d\theta = k\,2\pi\frac{R^3}{3}\Bigg|_0^R = \frac{2}{3}k\pi R^3.$$

## § 9. MOMENTO DE INERCIA DEL AREA DE UNA FIGURA PLANA

Se llama momento de inercia $I$ de un punto material $M$ de masa $m$ respecto a un cierto punto $O$ al producto de la masa $m$ por el cuadrado de la distancia $r$ entre los puntos $M$ y $O$:

$$I = mr^2.$$

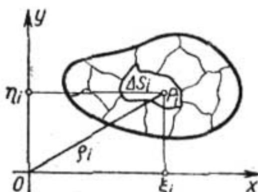



*Fig. 311*

El momento de inercia de un sistema de puntos materiales $m_1, m_2, \ldots, m_n$ respecto al punto $O$ es la suma de los momentos de inercia de los diversos puntos del sistema:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

Determinemos, ahora, el momento de inercia de una figura material plana $D$.

Supongamos que la figura $D$ está situada en el plano de coordenadas $Oxy$. Determinemos el momento de inercia de esta figura respecto al origen de coordenadas, suponiendo que la densidad superficial es por dondequiera igual a la unidad.

Dividamos $D$ en los dominios parciales $\Delta S_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (fig. 311). En cada dominio parcial tomemos un punto $P_i$ de coor-

*) La expresión $\Delta s_i \to 0$ significa aquí que el diámetro de $\Delta s_i$ tiende a cero.

denadas $\xi_i$, $\eta_i$. El producto de la masa del dominio parcial $\Delta S_i$ por el cuadrado de la distancia $r_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2$, se llama momento elemental de inercia $\Delta I_i$ de $\Delta S_i$:

$$\Delta I = (\xi_i^2 + \eta_i^2)\,\Delta S_i.$$

Formemos la suma de estos momentos:

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i^2)\,\Delta S_i,$$

la que es, al mismo tiempo, una suma integral para la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ por el dominio $D$.

Determinemos el momento de inercia de la figura $D$ como el límite de esta suma integral, cuando el diámetro de cada $\Delta S_i$ tiende a cero:

$$I_0 = \lim_{\text{diám}\,\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i^2)\,\Delta S_i.$$

Pero, el límite de esta suma es la integral doble $\iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$. Por consiguiente, el momento de inercia de la figura $D$ respecto al origen de coordenadas es igual a:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy, \tag{1}$$

donde $D$ es el dominio coincidente con la figura plana dada.

Las integrales

$$I_{xx} = \iint_D y^2\,dx\,dy, \tag{2}$$

$$I_{yy} = \iint_D x^2\,dx\,dy \tag{3}$$

se llaman, respectivamente, los momentos de inercia de la figura $D$ respecto a los ejes $Ox$ y $Oy$.

**Ejemplo 1.** Calcular el momento de inercia del área de círculo $D$ de radio $R$, respecto al centro $O$.

**Solución:** Según la fórmula (1), tenemos:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

Para calcular esta integral, pasaremos a las coordenadas polares $\theta$, $\rho$.

La ecuación de la circunferencia en coordenadas polares es $\rho = R$. Por eso,

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R \rho^2 \rho\,d\rho \right) d\theta = \frac{\pi R^4}{2}.$$

**Observación.** Si la densidad superficial $\gamma$ no es igual a 1 y es una cierta función de $x$ e $y$, es decir, $\gamma = \gamma(x, y)$, entonces la masa del dominio parcial $\Delta S_i$ será igual a $\gamma(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i$ (con precisión de

hasta las infinitesimales de orden superior) y por esto, el momento de inercia de una figura plana respecto al origen de coordenadas, será:

$$I_0 = \iint_D \gamma(x, y)(x^2 + y^2)\, dx\, dy. \tag{1'}$$

**Ejemplo 2.** Calcular el momento de inercia de la figura material plana $D$ limitada por las líneas $y^2 = 1 - x$; $x = 0$, $y = 0$, respecto al eje $Oy$, si la densidad superficial en cada punto es igual a $y$ (fig. 312).

**Solución.**

$$I_{yy} = \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x}} yx^2\, dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x^2y^2}{2} \Bigg|_0^{\sqrt{1-x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (1-x)\, dx = \frac{1}{24}.$$

**Elipse de inercia.** Determinemos el momento de inercia de una figura plana $D$ respecto a cierto eje $OL$ que pasa por un punto $O$ tomado por el origen de coordenadas.

Sea $\varphi$ el ángulo formado por la recta $OL$ con la dirección positiva del eje $Ox$ (fig. 313).

La ecuación normal de la recta $OL$ es

$$x \operatorname{sen} \varphi - y \cos \varphi = 0.$$

La distancia $r$ de un punto cualquiera $M(x, y)$ a esta recta es igual a $r = | x \operatorname{sen} \varphi - y \cos \varphi |$. El momento de inercia $I$ del

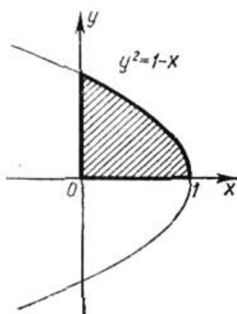


Fig. 312

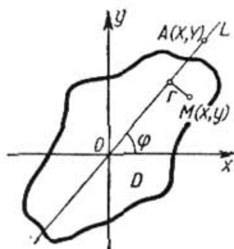


Fig. 313

área $D$ en relación a la recta $OL$, según la definición, se expresa mediante la integral

$$I = \iint_D r^2\, dx\, dy = \iint_D (x \operatorname{sen} \varphi - y \cos \varphi)^2\, dx\, dy =$$

$$= \operatorname{sen}^2 \varphi \iint_D x^2\, dx\, dy - 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \iint_D xy\, dx\, dy + \cos^2 \varphi \iint_D y^2\, dx\, dy.$$

Por tanto,

$$I = I_{yy}\,\mathrm{sen}^2\varphi - 2I_{xy}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi + I_{xx}\cos^2\varphi, \tag{4}$$

ponde $I_{yy}=\iint\limits_D x^2\,dx\,dy$ es el momento de inercia de la figura respecto al eje $y$; $I_{xx}=\iint\limits_D y^2\,dx\,dy$ es el momento de inercia de la misma respecto al eje $x$, y, además:

$$I_{xy}=\iint\limits_D xy\,dx\,dy.$$

Dividiendo todos los términos de la última ecuación (4) por $I$ obtenemos:

$$1 = I_{xx}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{I}}\right)^2 - 2I_{xy}\left(\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{\sqrt{I}}\right)\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{I}}\right) + I_{yy}\left(\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{\sqrt{I}}\right)^2. \tag{5}$$

Tomemos en la recta $OL$ un punto $A$ $(X,\ Y)$ tal, que sea

$$OA=\frac{1}{\sqrt{I}}.$$

Distintos valores de $I$ y diferentes puntos $A$ corresponden a varias direcciones del eje $OL$, es decir, a diferentes valores del ángulo $\varphi$. Hallemos el lugar geométrico de los puntos $A$. Es evidente, que

$$X=\frac{1}{\sqrt{I}}\cos\varphi, \qquad Y=\frac{1}{\sqrt{I}}\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

En virtud de la igualdad (5), las magnitudes $X$ e $Y$ están entrelazadas por la correlación

$$1 = I_{xx}X^2 - 2I_{xy}XY + I_{yy}Y^2. \tag{6}$$

De este modo, el lugar geométrico de los puntos $A$ $(X,\ Y)$ es la curva de segundo grado (6). Demostremos que esta curva es una elipse. Tenemos la siguiente desigualdad, llamada de Buniakovski*) (mate-

*) Para demostrar la desigualdad de Buniakovski examinemos la siguiente desigualdad evidente:

$$\iint\limits_D [f(x,\ y)-\lambda\varphi(x,\ y)]^2\,dx\,dy \geqslant 0,$$

donde $\lambda$ es una constante. El signo de igualdad puede tener lugar sólo en el caso, en que $f(x,\ y)-\lambda\varphi(x,\ y)\equiv 0$, es decir, cuando $f(x,\ y)=\lambda\varphi(x,\ y)$. Si suponemos que $\dfrac{f(x,\ y)}{\varphi(x,\ y)}\neq \mathrm{const}=\lambda$, siempre tendrá lugar el signo de desigualdad. Así, abriendo los paréntesis bajo el signo de integral, obtenemos:

$$\iint\limits_D f^2(x,\ y)\,dx\,dy - 2\lambda\iint\limits_D f(x,\ y)\,\varphi(x,\ y)\,dx\,dy + \lambda^2\iint\limits_D \varphi^2(x,\ y)\,dx\,dy > 0.$$

Analicemos la expresión del primer miembro como una función de $\lambda$. Es un polinomio de segundo grado que nunca se anula. Por tanto, sus raíces son comple-

mático ruso):

$$\left(\iint\limits_D xy\,dx\,dy\right)^2 < \left(\iint\limits_D x^2\,dx\,dy\right) \iint\limits_D y^2\,dx\,dy\,)$$

ó

$$I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2 > 0.$$

Así, el discriminante de la curva (6) es positivo y, por consiguiente, ésta es una elipse (fig. 314). Esta elipse se llama **elipse de inercia.** La noción de elipse de inercia tiene gran importancia en mecánica.

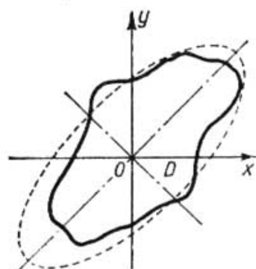



*Fig. 314*

Notemos que las longitudes de los ejes de la elipse de inercia y su posición en el plano dependen de la forma de la figura plana dada. Como la distancia entre el origen de coordenadas y un punto arbitrario $A$ de la elipse es igual a $\frac{1}{\sqrt{I}}$, donde $I$ es el momento de inercia de la figura respecto al eje $OA$, por tanto, al construir la elipse, es fácil calcular el momento de inercia de la figura $D$ respecto a una recta cualquiera, que pasa por el origen de coordenadas. En particular, es fácil ver que el momento de inercia de la figura es máximo respecto al eje pequeño de esta elipse, y mínimo, respecto a su eje grande.

## § 10. COORDENADAS DEL CENTRO DE GRAVEDAD DEL AREA DE UNA FIGURA PLANA

Hemos indicado en el § 8 del capítulo XII (tomo I), que las coordenadas del centro de gravedad de un sistema de puntos materiales $P_1, P_2, \ldots, P_n$ (de masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$, respectivamente)

---

jos, lo que puede tener lugar sólo en el caso cuando el discriminante, formado de los coeficientes del polinomio cuadrático sea negativo, es decir:

$$\left(\iint\limits_D f\varphi\,dy\right)^2 - \iint\limits_D f^2\,dx\,dy \iint\limits_D \varphi^2\,dx\,dy < 0$$

ó

$$\left(\iint\limits_D f\varphi\,dx\,dy\right)^2 < \iint\limits_D f^2\,dx\,dy \iint\limits_D \varphi^2\,dx\,dy.$$

Esta es la desigualdad de Buniakovski. En nuestro caso $f(x, y) = x$, $\varphi(x, y) = y$, $\frac{x}{y} \neq$ const.

La desigualdad de Buniakovski siempre se usa en diferentes ramas de las matemáticas. En varias obras esta desigualdad erróneamente se llama desigualdad de Schwarz. Buniakovski la publicó (junto con otras desigualdades importantes) en el año 1859, mientras que Schwarz lo hizo 16 años después.

se determinan por las fórmulas:

$$x_c = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}; \qquad y_c = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}. \tag{1}$$

Determinemos, ahora, las coordenadas del centro de gravedad de una figura plana $D$. Dividámosla en los dominios parciales $\Delta S_i$ muy pequeños. Si suponemos que la densidad superficial es igual a 1, la masa del dominio parcial será igual a su área. Si convencionalmente suponemos que toda la masa de $\Delta S_i$ está concentrada en alguno de sus puntos $P_i(\xi_i, \eta_i)$, podemos considerar la figura $D$ como un **sistema de puntos materiales.** En este caso, en virtud de las fórmulas (1), las coordenadas del centro de gravedad de esta figura serán determinadas, **aproximadamente**, por las igualdades:

$$x_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \xi_i \,\Delta S_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \Delta S_i}; \qquad y_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \eta_i \,\Delta S_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \Delta S_i}.$$

Pasando al límite, cuando $\Delta S_i \to 0$, las sumas integrales en los numeradores y los denominadores de las fracciones se transforman en las integrales dobles, con lo que obtenemos las fórmulas exactas para calcular las coordenadas del centro de gravedad de una figura plana:

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}; \qquad y_c = \frac{\iint\limits_D y\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}. \tag{2}$$

Estas fórmulas deducidas para una figura plana de densidad superficial igual a 1 son válidas, también, para cada figura, que tiene otra densidad $\gamma$ cualquiera, constante en todos los puntos.

Si la densidad superficial es variable:

$$\gamma = \gamma(x, y),$$

las fórmulas correspondientes toman, entonces, la forma:

$$x_c = \frac{\iint\limits_D \gamma(x, y)\,x\,dx\,dy}{\iint\limits_D \gamma(x, y)\,dx\,dy}; \qquad y_c = \frac{\iint\limits_D \gamma(x, y)\,y\,dx\,dy}{\iint\limits_D \gamma(x, y)\,dx\,dy}.$$

Las expresiones

$$M_y = \iint\limits_D \gamma(x, y)\,x\,dx\,dy \quad \text{y} \quad M_x = \iint\limits_D \gamma(x, y)\,y\,dx\,dy$$

se llaman *momentos estáticos* de la figura plana $D$ respecto a los ejes $Oy$ y $Ox$.

La integral $\iint \gamma(x, y)\,dx\,dy$ expresa la magnitud de la **masa** de la figura examinada.

**Ejemplo.** Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la cuarta parte de la elipse (fig. 315)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

suponiendo, que la densidad superficial en todos los puntos es igual a 1.

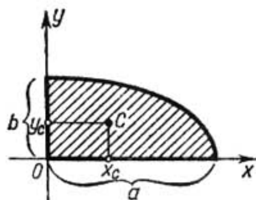



*Fig. 315*

**Solución.** Según las fórmulas (2), obtenemos:

$$x_c=\frac{\int\limits_0^a\left(\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} x\,dy\right)dx}{\int\limits_0^a\left(\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy\right)dx}=\frac{\frac{b}{a}\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,x\,dx}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{-\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}\Big|_0^a}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{4a}{3\pi},$$

$$y_c=\frac{\int\limits_0^a\left(\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy\right)dx}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{4b}{3\pi}.$$

## § 11. INTEGRAL TRIPLE

Sea dado en el espacio cierto dominio $V$, limitado por una superficie cerrada $S$. Supongamos que en el dominio $V$ y en su frontera está definida una función continua $f(x, y, z)$, donde $x, y, z$ son las coordenadas rectangulares de un punto del dominio. Para precisar las ideas en el caso, en que $f(x, y, z)\geqslant 0$, podemos suponer que ésta representa la densidad de distribución de cierta materia en el dominio $V$.

Dividamos el dominio $V$ arbitrariamente en dominios parciales $\Delta v_i$, designando con el símbolo $\Delta v_i$ no sólo el dominio elemental,

sino también su volumen. En cada $\Delta v_i$ tomemos un punto arbitrario $P_i$ y designemos por $f(P_i)$ el valor de la función $f$ en este punto. Formemos la suma integral

$$\sum f(P_i)\,\Delta v_i \tag{1}$$

y aumentemos indefinidamente el número de los dominios parciales de modo que el diámetro máximo de $\Delta v_i$ tienda a cero*). Si la función $f(x, y, z)$ es continua, existe el límite de las sumas integrales de la forma (1), donde al límite se le da el mismo significado, que hemos dado durante la determinación de la integral doble**). Este límite, que no depende del modo de dividir el dominio $V$, ni de la manera de elegir los puntos $P_i$, se designa por el símbolo $\iiint\limits_V f(P)\,dv$ y se llama *integral triple*. Así, según la definición, tenemos:

$$\lim_{\text{diám}\,\Delta v_i \to 0} \sum f(P_i)\,\Delta v_i = \iiint\limits_V f(P)\,dv$$

ó

$$\iiint\limits_V f(P)\,\Delta v = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \tag{2}$$

Si consideramos $f(x, y, z)$ como la densidad volumétrica de la distribución de una materia en un dominio $V$, la integral (2) nos dará la masa de toda la substancia contenida en el volumen $V$.

## § 12. CALCULO DE LA INTEGRAL TRIPLE

Supóngase que un dominio espacial (tridimensional) $V$, limitado por una superficie cerrada $S$, tiene las siguientes propiedades:

1) toda recta paralela al eje $Oz$, trazada por un punto interior del dominio $V$ (es decir, por un punto que no pertenece a la frontera $S$) corta la superficie $S$ en dos puntos;

2) todo dominio $V$ se proyecta sobre el plano $Oxy$ en forma de un dominio regular (de dos dimensiones) $D$;

3) toda parte del dominio $V$, separada por un plano paralelo a un plano de coordenadas cualquiera ($Oxy$, $Oxz$, $Oyz$), también posee las propiedades 1) y 2).

Un dominio $V$ que tiene las propiedades indicadas se llama dominio *regular* tridimensional.

---

*) Se llama diámetro del dominio parcial $\Delta v_i$ la distancia máxima entre los puntos de su frontera.

**) Admitamos sin demostración este teorema sobre la existencia del límite de las sumas integrales (es decir, la existencia de la integral triple) que tiene lugar para toda función continua en un dominio cerrado $V$, incluyendo la frontera.

Estos dominios tridimensionales regulares son, por ejemplo, un elipsoide, un paralelepípedo rectangular, un tetráedro, etc. En la figura 316 se da un ejemplo del dominio tridimensional irregular. En este párrafo examinemos sólo los dominios regulares.

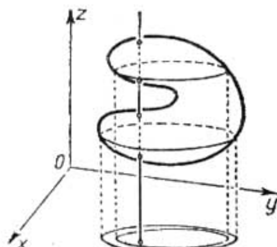



*Fig. 316*

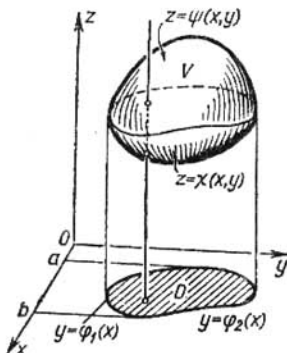



*Fig. 317*

Sea $z = \chi(x, y)$ la ecuación de una superficie que limita el dominio $V$ por debajo, y $z = \psi(x, y)$, la de una superficie que limita $V$ por arriba (fig. 317).

Introduzcamos la noción de una *integral iterada* de tercer orden $I_V$, extendida por el dominio $V$, de una función de tres variables $f(x, y, z)$ definida y continua en $V$. Supongamos que la proyección del dominio $V$ sobre el plano $Oxy$ es el dominio $D$ que está limitado por las líneas:

$$y = \varphi_1(x), \quad y = \varphi_2(x), \quad x = a, \quad x = b.$$

En este caso, la integral iterada de tercer orden de la función $f(x, y, z)$ por el dominio $V$ se determina así:

$$I_V = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[ \int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dy \right\} dx. \tag{1}$$

Notemos que, como el resultado de la integración respecto a $z$, y la sustitución de los límites en las llaves, obtenemos una función de $x$ e $y$. Luego, se puede calcular una integral doble de esta función extendida por el dominio $D$, como lo hemos hecho anteriormente.

Demos un ejemplo del cálculo de una integral iterada de tercer orden.

**Ejemplo 1.** Calcular la integral iterada de tercer orden de la función $f(x, y, z) = xyz$, extendida por el dominio $V$ limitado por los planos

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 1.$$

**Solución.** Este dominio es regular: puesto que está limitado por encima y por debajo por los planos $z = 0$, $z = 1 - x - y$, respectivamente y, además, su proyección sobre el plano $Oxy$ representa un dominio regular plano $D$ que es un triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $y = 1 - x$ (fig. 318). Por eso, la integral iterada de tercer orden se calcula de la manera siguiente:

$$I_V = \int\int_D \left[\int_0^{1-x-y} xyz\,dz\right] d\sigma.$$

Poniendo los límites en la integral iterada de segundo orden extendida por el dominio $D$, obtenemos:

$$I_V = \int_0^1 \left\{\int_0^{1-x}\left[\int_0^{1-x-y} xyz\,dz\right]dy\right\}dx = \int_0^1\left\{\int_0^{1-x}\frac{xyz^2}{2}\Big|_{z=0}^{z=1-x-y} dy\right\}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left\{\int_0^{1-x} xy(1-x-y)^2\,dy\right\}dx = \int_0^1 \frac{x}{24}(1-x)^4\,dx = \frac{1}{720}.$$

Analicemos, ahora, algunas propiedades de la integral iterada de tercer orden.

**Propiedad 1.** *Si el dominio $V$ está dividido en dos dominios $V_1$ y $V_2$ mediante un plano paralelo a cualquiera de los planos de coordenadas, la integral iterada de tercer orden extendida por el dominio $V$ es igual a la suma de integrales iteradas de tercer orden extendidas por los dominios $V_1$ y $V_2$.*

No hace falta repetir aquí la demostración de esta propiedad, pues, es idéntica en todos los puntos a la aplicada en el caso de la integral iterada de segundo orden.

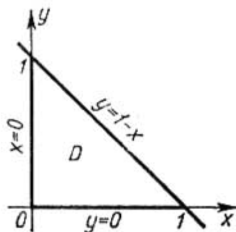


*Fig. 318*

**Corolario.** Cualquiera que sea el modo de dividir el dominio $V$ en un número finito de dominios $V_1, \ldots, V_n$ mediante planos paralelos a los planos de coordenadas, se verifica la igualdad:

$$I_V = I_{V_1} + I_{V_2} + \ldots + I_{V_n}.$$

**Propiedad 2 (Teorema sobre la evaluación de una integral iterada de tercer orden).** *Si $m$ y $M$ son valores mínimo y máximo, respectivamente, de la función $f(x, y, z)$ en el dominio $V$, se verifica la desigualdad:*

$$mV \leqslant I_V \leqslant MV,$$

*donde $V$ es el volumen del dominio dado y $I_V$, la integral iterada de tercer orden de la función $f(x, y, z)$, extendida por $V$.*

**Demostración.** Evaluemos al principio la integral interior que forma parte de la integral iterada de tercer orden $I_V =$

$$= \iint_D \left[ \int_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} f(x,\,y,\,z)\,dz \right] d\sigma:$$

$$\int_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} f(x,\,y,\,z)\,dz \leqslant \int_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} M\,dz = M \int_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} dz =$$

$$= Mz \Big|_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} = M\,[\psi(x,\,y) - \chi(x,\,y)].$$

Así, la integral interior no supera a la expresión $M\,[\psi(x,\,y) - \chi(x,\,y)]$. Por consiguiente, en virtud del teorema del § 1 sobre las integrales dobles, designando por $D$ la proyección del dominio $V$ sobre el plano $Oxy$, obtenemos:

$$I_V = \iint_D \left[ \int_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} f(x,\,y,\,z)\,dz \right] d\sigma \leqslant \iint_D M\,[\psi(x,\,y) - \chi(x,\,y)]\,d\sigma =$$

$$= M \iint_D [\psi(x,\,y) - \chi(x,\,y)]\,d\sigma.$$

Pero, la última integral iterada de segundo orden es igual a la integral doble de la función $\psi(x,\,y) - \chi(x,\,y)$ y, por tanto, al volumen del dominio comprendido entre las superficies $z = \chi(x,\,y)$ y $z = \psi(x,\,y)$, es decir, al volumen del dominio $V$. Por consiguiente,

$$I_V \leqslant MV.$$

De modo análogo demostremos que $I_V \geqslant mV$. La propiedad 2 queda así demostrada.

**Propiedad 3 (Teorema de la media).** *La integral iterada de tercer orden $I_V$ de una función continua $f(x,\,y,\,z)$ extendida por el dominio $V$ es igual al producto de su volumen $V$ por el valor de la función en un cierto punto $P$ del dominio $V$, es decir,*

$$I_V = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[ \int_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} f(x,\,y,\,z)\,dz \right] dy \right\} dx = f(P)\,V. \qquad (2)$$

La demostración de esta propiedad es análoga a la que hemos dado durante la demostración de semejante propiedad para la integral doble (véase § 2, propiedad 3, fórmula (4)). Ahora podremos demostrar el teorema sobre el cálculo de la integral triple.

**Teorema.** *La integral triple de una función $f(x,\,y,\,z)$,* extendida por un dominio regular $V$ es igual a la integral iterada de tercer

orden extendida por el mismo dominio, es decir,

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dv = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[ \int_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z)\,dz \right] dy \right\} dx.$$

**Demostración.** Dividamos el dominio $V$ mediante planos paralelos a los planos de coordenadas en $n$ dominios regulares:

$$\Delta v_1 + \Delta v_2 + \ldots + \Delta v_n.$$

Designemos con $I_V$, como hemos hecho anteriormente, la integral iterada de tercer orden de la función $f(x, y, z)$ extendida por el dominio $V$ y con $I_{\Delta V_i}$, la integral iterada de tercer orden extendida por $\Delta v_i$. En virtud del corolario de la propiedad 1 se puede escribir la igualdad:

$$I_V = I_{\Delta V_1} + I_{\Delta V_2} + \ldots + I_{\Delta V_n}. \qquad (3)$$

Transformemos cada sumando del segundo miembro de esta ecuación según la fórmula (2):

$$I_V = f(P_1)\,\Delta v_1 + f(P_2)\,\Delta v_2 + \ldots + f(P_n)\,\Delta v_n, \qquad (4)$$

donde $P_i$ es cierto punto de $\Delta v_i$.

En el segundo miembro de la igualdad (4) tenemos una suma integral. Según la hipótesis, la función $f(x, y, z)$ es continua en el dominio $V$, por lo cual, cuando el diámetro máximo de $\Delta v_i$ tiende a cero; el límite de esta suma existe y es igual a la integral triple de la función $f(x, y, z)$ extendida por el dominio $V$. Así, pasando al límite en la igualdad (4), para diám $\Delta v_i \to 0$, obtenemos:

$$I_V = \iiint_V f(x, y, z)\,dv,$$

o, en definitiva, cambiando de lugar las expresiones del primer y segundo miembros, tenemos:

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dv = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[ \int_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z)\,dz \right] dy \right\} dx.$$

El teorema queda demostrado.

Aquí, $z = \chi(x, y)$ y $z = \psi(x, y)$ son ecuaciones de las superficies que limitan el dominio regular $V$ por debajo y por arriba. Las líneas $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$, limitan el dominio $D$ que es la proyección de $V$ sobre el plano $Oxy$.

**Observación.** Igual que en el caso de la integral iterada de segundo orden, si la forma del dominio $V$ lo permite, se puede formar la integral iterada de tercer orden con otra sucesión de la integración respecto a las variables y con otros límites.

**Cálculo del volumen de un cuerpo mediante la integral iterada de tercer orden.**

Si el integrando $f(x, y, z) = 1$, la integral iterada de tercer orden extendida por el dominio $V$ expresa el **volumen V de este**

**dominio:**

$$V=\iiint\limits_{V} dx\,dy\,dz. \tag{5}$$

**Ejemplo 2.** Calcular el volumen de un elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

**Solución.** El elipsoide (fig. 319), está limitado por debajo, con la superficie $z=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ y por encima, con la $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$.

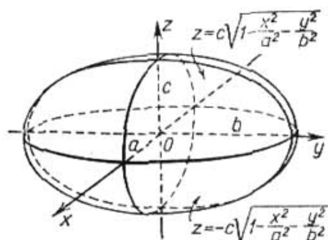



*Fig. 319*

La proyección de este elipsoide sobre el plano $Oxy$ (dominio $D$) es la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Por consiguiente, reduciendo a la integral iterada de tercer orden, obtenemos:

$$V \int_{-a}^{a}\left[\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz\right)dy\right]dx=$$

$$=2c\int_{-a}^{a}\left[\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\right]dx.$$

Durante el cálculo de la integral interior consideremos $x$ constante. Hagamos sustitución:

$$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\operatorname{sen} t,\ dy=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos t\,dt.$$

La variable $y$ varía desde $-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ hasta $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, por lo que $t$

varía desde $-\frac{\pi}{2}$ hasta $\frac{\pi}{2}$. Poniendo los nuevos límites en la integral, obtenemos:

$$V=2c\int_{-a}^{a}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\operatorname{sen}^2 t}\; b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos t\,dt\right]dx=$$

$$=2cb\int_{-a}^{a}\left[\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt\right]dx=\frac{cb\pi}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{4\pi abc}{3}.$$

Así, $V=\frac{4}{3}\pi abc$. Si $a=b=c$, obtenemos el volumen de una esfera:

$$V=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

## § 13. CAMBIO DE VARIABLES EN UNA INTEGRAL TRIPLE

**1. Integral triple en coordenadas cilíndricas.** En las así llamadas coordenadas cilíndricas la posición del punto $P$ en el espacio se determina mediante tres números $\theta$, $\rho$, $z$, donde $\theta$ y $\rho$ son las coordenadas polares de la proyección del punto $P$ sobre el plano $Oxy$,

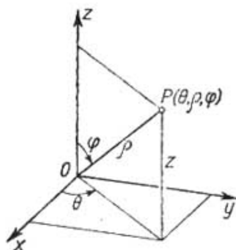



*Fig. 320*

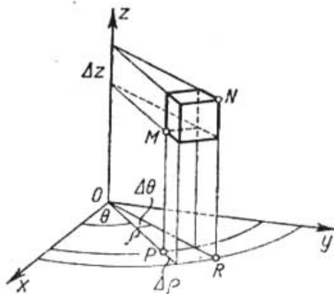



*Fig. 321*

y $z$ es la cota del mismo punto $P$, es decir, su distancia hasta el plano $Oxy$; la última tiene el signo «más», si el punto se encuentra encima del plano $Oxy$ y el signo «menos», en el caso contrario (fig. 320).

Dividamos el dominio tridimensional dado $V$ en volúmenes elementales mediante las superficies de coordenadas $\theta=\theta_i$, $\rho=\rho_j$,

$z = z_k$ las que son, respectivamente, semiplanos que contienen el eje $Oz$, cilindros circulares cuyo eje coincide con el $Oz$, planos perpendiculares al eje $Oz$. El volumen elemental es, entonces, un prisma curvilíneo representado el la fig. 321. El área de la base de este prisma, con la precisión de hasta infinitesimales de orden superior, es igual a $\rho\,\Delta\theta\,\Delta\rho$, su altura es $\Delta z$. Para simplificar la inscripción omitamos los índices $i$, $j$, $k$. Por tanto, $\Delta v = \rho\,\Delta\theta\,\Delta\rho\,\Delta z$. La integral triple de la función $F(\theta, \rho, z)$, por el dominio $V$ tiene la forma

$$I = \iiint_V F(\theta,\ \rho,\ z)\,\rho\,d\theta\,d\rho\,dz. \qquad (1)$$

Los límites de integración son determinados por la forma del dominio $V$.

Si la integral triple de la función $f(x,\ y,\ z)$ está dada en coordenadas rectangulares, es fácil transformarla en la integral triple en coordenadas cilíndricas. En efecto, al notar que

$$x = \rho\cos\theta,\quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta,\quad z = z,\quad \text{obtenemos:}$$

$$\iiint_V f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_V F(\theta,\ \rho,\ z)\,\rho\,d\theta\,d\rho\,dz,$$

donde

$$f(\rho\cos\theta,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z) = F(\theta,\ \rho,\ z).$$

**Ejemplo.** Determinar la masa $M$ de una semiesfera de radio $R$ y centro en el origen de las coordenadas, si la densidad $F$ de su material en cada punto $(x,\ y,\ z)$ es proporcional a la distancia entre este punto y la base, es decir, $F = kz$.

**Solución.** La ecuación de la semiesfera superior

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

en las coordenadas cilíndricas tiene la forma

$$z = \sqrt{R^2 - \rho^2}.$$

Por tanto:

$$M = \iiint_V kz\rho\,d\theta\,d\rho\,dz = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\left(\int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} kz\,dz\right)\rho\,d\rho\right]d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^R \frac{kz^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{R^2-\rho}} \rho\,d\rho\right]d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^R \frac{k}{2}(R^2-\rho^2)\rho\,d\rho\right]d\theta =$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right]d\theta = \frac{k}{2}\,\frac{R^4}{4}\,2\pi = \frac{k\pi R^4}{4}.$$

**2. Integral triple en coordenadas esféricas.** En coordenadas esféricas la posición de un punto $P$ en el espacio la determinan tres números $\theta$, $r$, $\varphi$, donde $r$ es la distancia del punto al origen de coorde-

nadas, así llamado radio vector del punto, $\varphi$ es el ángulo entre el radio vector y el eje $Oz$, $\theta$ es el ángulo entre la proyección del radio vector sobre el plano $Oxy$ y el eje $Ox$. El último ángulo lo tomamos a partir del eje $Ox$, en la dirección positiva (es decir, contra el movimiento de las agujas del reloj) (fig. 322). Para todo punto del espacio tenemos:

$$0 \leqslant r < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Dividamos el dominio dado $V$ en los volúmenes elementales $\Delta v$ mediante las superficies de coordenadas $r =$ const (esferas), $\varphi =$

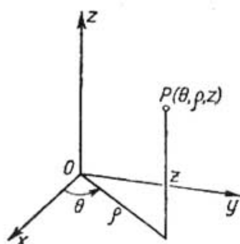



*Fig. 322*

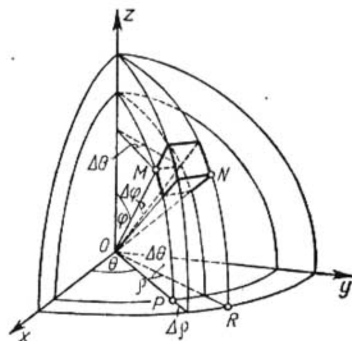



*Fig. 323*

$=$ const (superficies cónicas con los vértices en el origen de coordenadas), $\theta =$ const (semiplanos que pasan por el eje $Oz$). Con la precisión de hasta infinitesimales de orden superior, podemos considerar el volumen elemental $\Delta v$ como paralelepípedo de las aristas de longitudes $\Delta r$, $r\,\Delta\varphi$, $r$ sen $\varphi\,\Delta\theta$. Entonces el volumen elemental es igual a (véase fig. 323):

$$\Delta v = r^2 \operatorname{sen} \varphi \,\Delta r\, \Delta\theta\, \Delta\varphi.$$

La integral triple de la función $F(\theta, r, \varphi)$, por el dominio $V$, tiene la forma

$$I = \iiint_V F(\theta, r, \varphi)\, r^2 \operatorname{sen} \varphi \, dr\, d\theta\, d\varphi. \tag{1'}$$

Los límites de la integración son determinados por la forma del dominio $V$. De la figura 322 se deducen fácilmente las expresiones de las coordenadas cartesianas en función de la esféricas:

$$x = r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \quad z = r \cos \varphi.$$

Por eso, la fórmula de transformación de una integral triple en coordenadas cartesianas a la de coordenadas esféricas tiene la forma:

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_V f[r \operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\ r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,\ r\cos\varphi]\,r^2\operatorname{sen}\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

**3. Sustitución general de variables en una integral triple.** Los pasos de una integral triple en coordenadas cartesianas a la en coordenadas cilíndricas o esféricas son casos particulares de la transformación general de coordenadas en el espacio.

Supongamos que las funciones

$$x = \varphi(u, t, w),\ y = \psi(u, t, w),\ z = \chi(u, t, w)$$

representan una relación biunívoca entre el dominio $V$ en las coordenadas cartesianas $x$, $y$, $z$ y el dominio $V'$ en las coordenadas curvilíneas $u$, $t$, $w$. Supongamos que el dominio elemental o elemento de volumen $\Delta v$ de $V$ se transforma en el elemento $\Delta v'$ del dominio $V'$ y que

$$\lim_{\Delta v' \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta v'} = |I|.$$

Entonces:

$$\iiint_{V'} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{V'} f[\varphi(u, t, w),\ \psi(u, t, w),\ \chi(u, t, w)]\,|I|\,du\,dt\,dw.$$

Como en el caso de la integral doble aquí, también $I$ se llama *jacobiano*. Aquí, de modo idéntico, como lo hemos hecho para las integrales dobles, se puede demostrar que el jacobiano es numéricamente igual a la determinante de tercer orden:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Así, cuando se trata de coordenadas cilíndricas, tenemos:

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\operatorname{sen}\theta,\ z = z \quad (\rho = u,\ \theta = t,\ z = w)$$

$$I=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta & 0\\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho.$$

En el caso de coordenadas esféricas tenemos:

$x=r\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta,\;\; y=r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\;\; z=r\cos\varphi\;(r=u,\,\varphi=t,\,\theta=w)$;

$$I=\begin{vmatrix}\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\\ \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta & r\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta & r\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -r\,\mathrm{sen}\,\varphi & 0\end{vmatrix}=r^2\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

## § 14. MOMENTO DE INERCIA DE UN CUERPO Y COORDENADAS DE SU CENTRO DE GRAVEDAD

**1. Momento de inercia de un cuerpo.** Los momentos de inercia de un **punto** material $M(x,\ y,\ z)$ de masa $m$, respecto a los ejes de coordenadas $Ox$, $Oy$, $Oz$ (fig. 324) se expresan, correspondientemente, por medio de las fórmulas:

$$I_{xx}=(y^2+z^2)\,m,$$
$$I_{yy}=(x^2+z^2)\,m,\quad I_{zz}=(x^2+y^2)\,m.$$

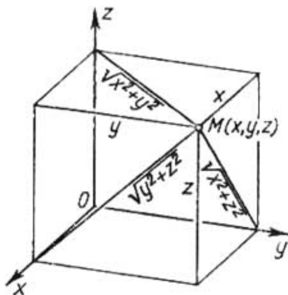



*Fig. 324*

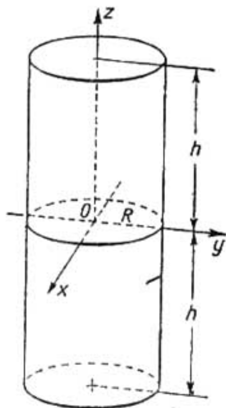



*Fig. 325*

Los momentos de inercia de un **cuerpo** se expresan por las integrales correspondientes. Así, por ejemplo, el momento de inercia de un cuerpo respecto al eje $Oz$, se expresa por la integral $I_{zz}=\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,\gamma(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz$, donde $\gamma(x,\ y,\ z)$ es la densidad de la materia.

**Ejemplo 1.** Calcular el momento de inercia de un cilindro recto circular de radio $R$ y altura $2h$ respecto al diámetro de su sección media, la densidad es constante e igual a $\gamma_0$.

**Solución.** Elijamos un sistema de coordenadas del modo siguiente: dirijamos el eje $Oz$ a lo largo del eje del cilindro y coloquemos el origen de coordenadas en su centro de simetría (fig. 325).

El problema se reduce al cálculo del momento de inercia del cilindro respecto al eje $Ox$:

$$I_{xx}=\iiint_V (y^2+z^2)\,\gamma_0 dx\,dy\,dz.$$

Pasando a las coordenadas cilíndricas, obtenemos:

$$I_{xx}=\gamma_0\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^R\left[\int_0^h (z^2+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta)\,dz\right]\rho\,d\rho\right\}d\theta=$$

$$=\gamma_0\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^R\left[\frac{2h^3}{3}+2h\rho^2\operatorname{sen}^2\theta\right]\rho\,d\rho\right\}d\theta=$$

$$=\gamma_0\int_0^{2\pi}\left\{\frac{2h^3}{3}\,\frac{R^2}{2}+\frac{2hR^4}{4}\operatorname{sen}^2\theta\right\}d\theta=$$

$$=\gamma_0\left[\frac{2h^3R^2}{6}\,2\pi+\frac{2hR^4}{4}\,\pi\right]^0=\gamma_0\pi hR^2\left[\frac{2}{3}\,h^2+\frac{R^2}{2}\right].$$

**2. Coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo.** Análogamente a lo expuesto en el § 8, cap. XII (tomo I) para las figuras planas, las coordenadas del centro de gravedad de un cuepro se expresan por las fórmulas:

$$x_c=\frac{\iiint_V x\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V \gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz};\qquad y_c=\frac{\iiint_V y\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V \gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz};$$

$$z_c=\frac{\iiint_V z\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V \gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz},$$

donde $\gamma(x, y, z)$ es la densidad.

**Ejemplo 2.** Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la mitad superior de una esfera de radio $R$ y centro en el origen de coordenadas; la densidad $\gamma_0$ es constante.

**Solución.** La semiesfera está limitada por las superficies

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\quad z=0.$$

La cota de su centro de gravedad se determina por la fórmula:

$$z_c=\frac{\iiint_V z\gamma_0\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V \gamma_0\,dx\,dy\,dz}.$$

Pasando a las coordenadas esféricas, obtenemos:

$$z_c = \frac{\gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int\limits_0^{R} r \cos \varphi r^2 \operatorname{sen} \varphi \, dr \right] d\varphi \right\} d\theta}{\gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int\limits_0^{R} r^2 \operatorname{sen} \varphi \, dr \right] d\varphi \right\} d\theta} = \frac{2\pi \frac{R^4}{4} \frac{1}{2}}{\frac{4}{6} \pi R^3} = \frac{3}{8} R.$$

En virtud de la simetría de la semiesfera, evidentemente tenemos

$$x_c = y_c = 0.$$

## § 15. CALCULO DE LAS INTEGRALES DEPENDIENTES DE UN PARAMETRO

Examinemos una integral que depende de un parámetro $\alpha$:

$$I(\alpha) = \int\limits_a^b f(x, \alpha) \, dx.$$

(Las integrales de este tipo ya las hemos considerado en el § 10, cap. XI, tomo I). Indiquemos sin demostración que si la función $f(x, \alpha)$ es continua respecto a $x$ en el segmento $(a, b)$, y respecto a $\alpha$ en el segmento $[\alpha_1, \alpha_2]$, la función

$$I(\alpha) = \int\limits_a^b f(x, \alpha) \, dx$$

es continua en el segmento $[\alpha_1, \alpha_2]$. Por tanto, podemos integrar la función $I(\alpha)$ respecto a $\alpha$ en el segmento $[\alpha_1, \alpha_2]$:

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} I(\alpha) \, d\alpha = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left( \int\limits_a^b f(x, \alpha) \, dx \right) d\alpha.$$

La expresión del segundo miembro es la integral iterada de segundo orden de la función $f(x, \alpha)$, por el rectángulo correspondiente al plano $Ox\alpha$. En esta integral se puede invertir el orden de la integración:

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left( \int\limits_a^b f(x, \alpha) \, dx \right) d\alpha = \int\limits_a^b \left( \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) \, d\alpha \right) dx.$$

Esta fórmula muestra que para la integración de una integral dependiente de un parámetro $\alpha$ es suficiente integrar el elemento de integración respecto a este parámetro $\alpha$. Esta fórmula suele ser útil también, al calcular ciertas integrales definidas.

Ejemplo. Calcular la integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx.$$

Esta integral indefinida del integrando no se puede calcular mediante las funciones elementales. Para resolver el problema, examinemos otra integral que se calcula fácilmente:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx=\frac{1}{\alpha}\ (\alpha>0).$$

Integrando esta igualdad entre los límites desde $\alpha=a$ hasta $\alpha=b$, obtenemos:

$$\int_a^b\left(\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx\right)d\alpha=\int_a^b\frac{d\alpha}{\alpha}=\ln\frac{b}{a}.$$

Cambiando el orden de integración en la primera integral, escribamos esta igualdad en la forma siguiente:

$$\int_0^\infty\left[\int_a^b e^{-\alpha x}d\alpha\right]dx=\ln\frac{b}{a},$$

de donde, calculando la integral interior, obtenemos:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx=\ln\frac{b}{a}.$$

## Ejercicios para el capítulo XIV

Calcular las integrales*): **1.** $\int_0^1\int_1^2 (x^2+y^2)\,dx\,dy$. *Respuesta*: $\frac{8}{3}$.

**2.** $\int_3^4\int_1^2 \frac{dy\,dx}{(x+y)^2}$. *Respuesta*: $\ln\frac{25}{24}$. **3.** $\int_1^2\int_x^{x\sqrt{3}} xy\,dx\,dy$. *Respuesta*: $\frac{15}{4}$.

---

*) Como hemos indicado anteriormente, si la integral está escrita en la forma: $\int_M^N\int_K^L f(x,y)\,dx\,dy$, entonces consideremos que la primera integración se efectúa respecto a la variable, cuya diferencial ocupa el primer lugar, es decir:

$$\int_M^N\int_K^L f(x,y)\,dx\,dy=\int_M^N\left(\int_K^L f(x,y)\,dx\right)dy.$$

4. $\int_0^{2\pi}\int_{a\,\text{sen}\,\theta}^{a} r\,dr\,d\theta$. *Respuesta:* $\frac{1}{2}\pi a^2$. 5. $\int_0^{a}\int_{\frac{x}{a}}^{x}\frac{x\,dy\,dx}{x^2+y^2}$. *Respuesta:* $\frac{\pi a}{4}-$ $-a\,\text{arctg}\,\frac{1}{a}$. 6. $\int_0^{a}\int_{y-a}^{2y} xy\,dx\,dy$. *Respuesta:* $\frac{11a^4}{24}$. 7. $\int_{\frac{b}{2}}^{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho\,d\theta\,d\rho$. *Respuesta:* $\frac{3}{16}\pi b^2$.

Determinar los límites de integración para la integral $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$, donde el dominio de integración está limitado por las líneas: 8. $x=2$, $x=3$, $y=-1$, $y=5$. *Respuesta:* $\int_2^3\int_{-1}^5 f(x,\ y)\,dy\,dx$. 9. $y=0$, $y=1-x^2$. *Respuesta:* $\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2} f(x,\ y)\,dy\,dx$. 10. $x^2+y^2=a^2$. *Respuesta:* $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,\ y)\,dy\,dx$.

11. $y=\frac{2}{1+x^2}$, $y=x^2$. *Respuesta:* $\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{\frac{2}{1+x^2}} f(x,\ y)\,dy\,dx$. 12. $y=0$, $y=a$, $y=x$, $y=x-2a$. *Respuesta:* $\int_0^{a}\int_y^{y+2a} f(x,\ y)\,dx\,dy$.

Invertir el orden de integración en las integrales:

13. $\int_1^2\int_3^4 f(x,\ y)\,dy\,dx$. *Respuesta:* $\int_3^4\int_1^2 f(x,\ y)\,dx\,dy$. 14. $\int_0^1\int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,\ y)\,dy\,dx$. *Respuesta:* $\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x,\ y)\,dx\,dy$. 15. $\int_0^a\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x,\ y)\,dx\,dy$. *Respuesta:* $\int_0^a\int_{a-\sqrt{a^2-x^2}}^{a} f(x,\ y)\,dy\,dx$. 16. $\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,\ y)\,dy\,dx$. *Respuesta:* $\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,\ y)\,dx\,dy$. 17. $\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\,dx\,dy$. *Respuesta:* $\int_{-1}^{0}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,\ y)\,dy\,dx+\int_0^1\int_0^{1-x} f(x,\ y)\,dy\,dx$.

Pasando a las coordenadas polares, calcular las integrales siguientes:

**18.** $\int\limits_0^a \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dy\, dx$. *Respuesta*: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^a \sqrt{a^2-\rho^2}\rho\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{6} a^3$.

**19.** $\int\limits_0^a \int\limits_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)\, dx\, dy$. *Respuesta*: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^a \rho^3 d\rho\, d\theta = \frac{\pi a^4}{8}$.

**20.** $\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx$. *Respuesta*: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^\infty e^{-\rho^2}\rho\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{4}$.

**21.** $\int\limits_0^{2a} \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy\, dx$. *Respuesta*: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2a\cos\theta} \rho\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi a^2}{2}$.

Transformar las integrales dobles, introduciendo nuevas variables $u$ y $v$, ligadas con $x$ e $y$ mediante las fórmulas $x=u-uv$, $y=uv$:

**22.** $\int\limits_0^c \int\limits_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\, dy\, dx$.

*Respuesta*: $\int\limits_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}} \int\limits_0^{\frac{c}{1-v}} f(u-uv, uv)\, u\, du\, dv$. **23.** $\int\limits_0^c \int\limits_0^b f(x, y)\, dy\, dx$.

*Respuesta*: $\int\limits_0^{\frac{b}{b+c}} \int\limits_0^{\frac{c}{1-v}} f(u-uv, uv)\, u\, du\, dv + \int\limits_{\frac{b}{b+c}}^1 \int\limits_0^{\frac{b}{v}} f(u-uv, uv)\, u\, du\, dv$.

## Aplicación de la integral doble para el cálculo de áreas

**24.** Calcular el área de la figura, limitada por la parábola $y^2=2x$ y la recta $y=x$. *Respuesta*: $\frac{2}{3}$.

**25.** Calcular el área de la figura, limitada por las líneas $y^2=4ax$, $x+y=3a$, $y=0$. *Respuesta*: $\frac{10}{3}a^2$.

**26.** Calcular el área de la figura, limitada por las líneas $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$, $x+y=a$. *Respuesta*: $\frac{a^2}{3}$.

**27.** Calcular el área de la figura, limitada por las líneas $y=\operatorname{sen} x$, $y=\cos x$, $x=0$. *Respuesta*: $\sqrt{2}-1$.

**28.** Calcular el área de un lazo de la curva $\rho=a\operatorname{sen} 2\theta$. *Respuesta*: $\frac{\pi a^2}{8}$.

29. Calcular toda el área, limitada por la lemniscata $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$. *Respuesta*: $a^2$.

30. Calcular el área de un lazo de la curva $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{2xy}{c^2}$.

**Indicación:** pasar a las nuevas variables $x = \rho a \cos\theta$ e $y = \rho b \operatorname{sen}\theta$. *Respuesta*: $\frac{a^2b^2}{c^2}$.

**Cálculo de volúmenes**

31. Calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$. *Respuesta*: $\frac{abc}{b}$. 32. $z=0$, $x^2+y^2=1$, $x+y+z=3$. *Respuesta*: $3\pi$. 33. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $xy=z$, $z=0$. *Respuesta*: $\pi$. 34. $x^2+y^2-2ax=0$, $z=0$, $x^2+y^2=z^2$. *Respuesta*: $\frac{32}{9}a^3$. 35. $y=x^2$, $x=y^2$, $z=0$, $z=12+y-x^2$ *Respuesta*: $\frac{549}{140}$.

36. Por los planos de coordenadas, el plano $2x+3y-12=0$ y el cilindro $z=\frac{1}{2}y^2$. *Respuesta*: 16.

37. Por el cilindro circular de radio $a$ y eje que coincide con el eje $Oz$, los planos de coordenadas y el plano $\frac{x}{a}+\frac{z}{a}=1$. *Respuesta*: $a^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)$.

38. Por los cilindros $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$. *Respuesta*: $\frac{16}{3}a^3$. 39. $y^2+z^2=x$, $x=y$, $z=0$. *Respuesta*: $\frac{\pi}{64}$. 40. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=R^3$, $a>R$. *Respuesta*: $\frac{4}{3}\pi\left[a^3-\left(\sqrt{a^2-R^2}\right)^3\right]$. 41. $az=x^2+y^2$, $z=0$, $x^2+y^2=2ax$. *Respuesta*: $\frac{3}{2}\pi a^3$. 42. $\rho^2=a^2\cos 2\theta$, $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z=0$. (Calcular el volumen interior respecto al cilindro). *Respuesta*: $\frac{1}{9}a^3(3\pi+20-16\sqrt{2})$.

**Cálculo del área de una superficie**

43. Calcular el área de la parte de la superficie del cono $x^2+y^2=z^2$, separada por el cilindro $x^2+y^2=2ax$. *Respuesta*: $2\pi a^2\sqrt{2}$.

44. Calcular el área de la parte del plano $x+y+z=2a$, que se encuentra en el primer octante y está limitada por el cilindro $x^2+y^2=a^2$. *Respuesta*: $\frac{\pi a^2}{4}\sqrt{3}$.

45. Calcular el área de la superficie de un segmento esférico (del menor), si el radio de la esfera es igual a $a$ y el radio de la base del segmento es igual a $b$. *Respuesta*: $2\pi\left(a^2-a\sqrt{a^2-b^2}\right)$.

46. Hallar el área de la parte de la superficie de una esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ separada por la superficie del cilindro $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$. *Respuesta*: $4\pi a^2-8a^2-\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

**47.** Hallar el área de la superficie de un cuerpo formado por la intersección de dos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$. *Respuesta*: $16a^2$.

**48.** Calcular el área de la parte de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 2ax$ comprendida entre el plano $z = 0$ y el cono $x^2 + y^2 = z^2$. *Respuesta*: $8a^2$.

**49.** Calcular el área de la parte de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = a^2$ comprendida entre los planos $z = mx$ y $z = 0$. *Respuesta*: $2ma^2$.

**50.** Calcular el área de la parte de la superficie de un paraboloide $y^2 + z^2 = 2ax$ comprendida entre el cilindro parabólico $y^2 = ax$ y el plano $x = a$. *Respuesta*: $\frac{1}{3}\pi a^2 (3\sqrt{3} - 1)$.

**Cálculo de la masa, de las coordenadas del centro de gravedad y del momento de inercia de figuras planas**

(En los problemas 51-62, y 64 supongamos que la densidad superficial es constante e igual a 1).

**51.** Determinar la masa de un disco circular de radio $a$, si la densidad en cualquier punto $P$ es inversamente proporcional a la distancia entre $P$ y el centro (el coeficiente de proporcionalidad es igual a $K$). *Respuesta*: $\pi aK$.

**52.** Calcular las coordenadas del centro de gravedad de un triángulo equilátero, tomando el eje $Ox$ por su altura, y el origen de coordenadas, por su vértice. *Respuesta*: $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $y = 0$.

**53.** Determinar las coordenadas del centro de gravedad de un sector circular de radio $a$, tomando el eje $Ox$ por la bisectriz de su ángulo. El ángulo de abertura del sector es igual a $2\alpha$. *Respuesta*: $x_c = \frac{2a \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$, $y_c = 0$.

**54.** Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la mitad superior del círculo $x^2 + y^2 = a^2$. *Respuesta*: $x_c = 0$, $y_c = \frac{4a}{3\pi}$.

**55.** Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la superficie de un arco de cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$. *Respuesta*: $x_c = a\pi$, $y_c = \frac{5a}{6}$.

**56.** Hallar las coordenadas del centro de gravedad del área limitada por un lazo de la curva $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$. *Respuesta*: $x_c = \frac{\pi a\sqrt{2}}{8}$, $y_c = 0$.

**57.** Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la superficie de la cardioide $\rho = a(1 + \cos\theta)$. *Respuesta*: $x_c = \frac{5a}{6}$, $y_c = 0$.

**58.** Calcular el momento de inercia del área de un rectángulo, limitado por las rectas $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, respecto al origen de coordenadas. *Respuesta*: $\frac{ab(a^2 + b^2)}{3}$.

**59.** Calcular el momento de inercia de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

a) respecto al eje $Oy$; b) respecto al origen de coordenadas. *Respuesta*: a) $\frac{\pi a^3 b}{4}$; b) $\frac{\pi ab}{4}(a^2 + b^2)$.

**60.** Calcular el momento de inercia del área del círculo $\rho = 2a\cos\theta$ respecto al polo. *Respuesta*: $\frac{3}{2}\pi a^4$.

**61.** Calcular el momento de inercia del área de la cardioide $\rho = a(1-\cos\theta)$ respesto al polo. *Respuesta*: $\frac{35\pi a^4}{16}$.

**62.** Calcular el momento de inercia del área del círculo $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 2a^2$, respecto al eje $Oy$. *Respuesta*: $3\pi a^4$.

**63.** Se da una placa cuadrada de lado $a$. La densidad en cada punto de esta placa es proporcional a la distancia desde este punto hasta uno de los vértices del cuadrado. Calcular el momento de inercia de la placa respecto a un lado que pasa por este vértice. *Respuesta*: $\frac{1}{40} ka^5 [7\sqrt{2} + 3\ln \times (\sqrt{2}+1)]$, donde $k$ es el factor de proporcionalidad.

**64.** Calcular el momento de inercia del área de la figura limitada por la parábola $y^2 = ax$ y la recta $x = a$ respecto a la recta $y = -a$. *Respuesta*: $\frac{8}{5} a^4$.

**Integrales triples**

**65.** Calcular $\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$, si el dominio de integración está limitado por los planos de coordenadas y el plano $x+y+z=1$. *Respuesta*: $\frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}$.

**66.** Calcular $\int_0^a \left\{ \int_0^x \left[ \int_0^y xyz\,dz \right] dy \right\} dx$. *Respuesta*: $\frac{a^6}{48}$.

**67.** Calcular el volumen de un cuerpo limitado por la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y la superficie del paraboloide $x^2+y^2=3z$. *Respuesta*: $\frac{19}{6}\pi$.

**68.** *) Calcular las coordenadas del centro de gravedad y los momentos de inercia de la pirámide limitada por los planos: $x=0$, $y=0$, $z=0$; $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. *Respuesta*: $x_C = \frac{a}{4}$, $y_C = \frac{b}{4}$, $z_C = \frac{c}{4}$; $I_x = \frac{a^3bc}{60}$, $I_y = \frac{b^3ac}{60}$, $I_z = \frac{c^3ab}{60}$, $I_0 = \frac{abc}{60}(a^2+b^2+c^2)$.

**69.** Calcular el momento de inercia de un cono recto circular respecto a su eje. *Respuesta*: $\frac{1}{10}\pi hr^4$, donde $h$ es la altura del cono y $r$, el radio de su base.

**70.** Calcular el volumen de un cuerpo limitado por la superficie de la ecuación $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3x$. *Respuesta*: $\frac{1}{3}\pi a^3$.

**71.** Calcular el momento de inercia de un cono circular respecto al diámetro de su base. *Respuesta*: $\frac{\pi hr^2}{60}(2h^2+3r^2)$.

**72.** Calcular las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo limitado por una esfera de radio $a$ y una superficie cónica, de ángulo en el vértice $2\alpha$, si el vértice del cono coincide con el centro de la esfera. *Respuesta*: $x_c = 0$,

---

*) En los problemas 68-69, 71-73 supongamos que la densidad es constante e igual a 1.

$y_c=0$, $z_c=\frac{3}{8}a(1+\cos\alpha)$ (el eje $Oz$ coincide con el del cono y el vértice, con el origen de coordenadas).

**73.** Calcular las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo limitado por una esfera de radio $a$ y por dos planos, que pasan por el centro de la esfera y forman entre sí el ángulo de 60°. *Respuesta*: $\rho=\frac{9}{16}a$, $\theta=0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ (el eje $Oz$ se toma por la línea de intersección de los planos; el centro de la esfera, por el origen de coordenadas; $\rho$, $\theta$, $\varphi$ son las coordenadas esféricas).

**74.** Utilizando la igualdad $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x}\,d\alpha$ $(\alpha>0)$, calcular las integrales $\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}$ y $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\sqrt{x}}$. *Respuesta*: $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

CAPITULO XV

# INTEGRALES CURVILINEAS E INTEGRALES DE SUPERFICIE

## § 1. INTEGRAL CURVILINEA

Supongamos que el punto $P(x, y)$ se desplaza a lo largo de una curva plana $L$ de un punto $M$ a un punto $N$. Al punto $P$ está aplicada la fuerza $F$ que varía en magnitud y dirección cuando $P$ se desplaza, es decir, la fuerza es una función de las coordenadas del punto $P$:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(P).$$

Calculemos el trabajo $A$ de la fuerza $\boldsymbol{F}$ cuando el punto $P$ se desplaza de $M$ a $N$ (fig. 326). Dividamos, para esto, la curva $MN$ en $n$ segmentos arbitrarios por los puntos $M_0 = M$, $M_1$, $M_2$, . . . . . . , $M_n = N$, partiendo de $M$ a $N$, y designemos por $\Delta \boldsymbol{s}_i$ el vector $\overline{M_iM_{i+1}}$. Designemos por $\boldsymbol{F}_i$ la magnitud de la fuerza $\boldsymbol{F}$ en el punto $M_i$. En este caso, el producto escalar $\boldsymbol{F}_i \Delta \boldsymbol{s}_i$ podemos considerarlo como la expresión aproximada del trabajo de $\boldsymbol{F}$ a lo largo del arco $\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}$:

$$A_i \approx \boldsymbol{F}_i \Delta \boldsymbol{s}_i.$$

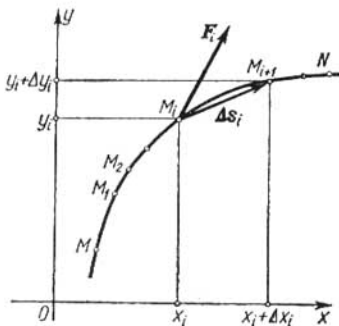



Fig. 326

Sea:

$$\boldsymbol{F} = X(x, y)\,\boldsymbol{i} + Y(x, y)\,\boldsymbol{j},$$

donde $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ son proyecciones del vector $\boldsymbol{F}$ sobre los ejes $Ox$ y $Oy$. Designando por $\Delta x_i$ y $\Delta y_i$ los incrementos de las coordenadas $x_i$ e $y_i$ durante el paso de $M_i$ a $M_{i+1}$, obtenemos:

$$\Delta \boldsymbol{s}_i = \Delta x_i \boldsymbol{i} + \Delta y_i \boldsymbol{j}.$$

Por consiguiente,

$$\boldsymbol{F}_i \,\Delta \boldsymbol{s}_i = X(x_i, y_i)\,\Delta x_i + Y(x_i, y_i)\,\Delta y_i.$$

El valor aproximado de trabajo $A$ de la fuerza $\boldsymbol{F}$ en toda la curva $MN$ es:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \Delta \boldsymbol{s}_i = \sum_{i=1}^{n} [X(x_i, y_i)\Delta x_i + Y(x_i, y_i)\Delta y_i]. \quad (1)$$

Sin hacer las definiciones rigurosas indiquemos mientras tanto que, si el límite de la expresión del segundo miembro de la igualdad existe cuando $\Delta \boldsymbol{s}_i \to 0$ (es evidente que $\Delta x_i \to 0$ y $\Delta y_i \to 0$), entonces, este límite expresa el trabajo de la fuerza $F$ a lo largo de la curva $L$ entre los puntos $M$ y $N$:

$$A = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} [X(x_i, y_i)\Delta x_i + Y(x_i, y_i)\Delta y_i]. \quad (2)$$

El límite *) del segundo miembro se llama *integral curvilínea* de $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ a lo largo de la curva $L$, y se designa así:

$$A = \int_L X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy \quad (3)$$

ó

$$A = \int_{(M)}^{(N)} X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy. \quad (3')$$

Los límites de las sumas de la forma (2) se encuentran a menudo en matemáticas y física, $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ se consideran como funciones de dos variables en un cierto dominio $D$.

Pongamos las letras $M$ y $N$, que reemplazan los límites de integración en la integral (3′), entre paréntesis, para indicar que ellas no son números, sino designaciones de los extremos de la curva por la que se toma la integral curvilínea. La dirección a lo largo de la curva $L$ de $M$ a $N$ se llama sentido de integración.

Si la curva $L$ es la del espacio, la integral curvilínea de las tres funciones $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$ $Z(x, y, z)$ se determina de una manera análoga:

$$\int_L X(x, y, z)\, dx + Y(x, y, z)\, dy + Z(x, y, z)\, dz =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x_k \to 0 \\ \Delta y_k \to 0 \\ \Delta z_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} X(x_k, y_k, z_k)\Delta x_k + Y(x_k, y_k, z_k)\Delta y_k + Z(x_k, y_k, z_k)\Delta z_k.$$

La letra $L$ por debajo del signo de la integral indica que la integración se efectúa a lo largo de la curva $L$.

Indiquemos dos propiedades de la integral curvilínea.

*) Aquí, el límite de la suma integral se entiende en el mismo sentido que en el caso de la integral definida (véase § 2, cap. XI, tomo I).

**Propiedad 1.** Una integral curvilínea se determina por el elemento de integración, la forma de la curva de integración y el sentido de integración.

La integral curvilínea cambia de signo simultáneamente con el cambio del sentido de integración, puesto que en este caso el vector $\Delta s$, y, por tanto, sus proyecciones $\Delta x$ y $\Delta y$ cambian de signo.

**Propiedad 2.** Dividamos la curva $L$ por el punto $K$ en dos partes $L_1$ y $L_2$ de modo que $\widehat{MN} = \widehat{MK} + \widehat{KN}$ (fig. 327). Entonces de la fórmula (1) directamente se deduce:

$$\int_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy = \int_{(M)}^{(K)} X\,dx + Y\,dy + \int_{(K)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy.$$

Esta correlación es válida para cualquier número de sumandos. Indiquemos más que la definición de integral curvilínea es válida también cuando la curva $L$ es cerrada.

En este caso el origen y el extremo de la curva coinciden.

Por eso, cuando tenemos una curva cerrada no podemos escribir $\int_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy$, sino sólo $\int_{L} X\,dx + Y\,dy$, indicando obligatoriamente el sentido del recorrido a lo largo de la curva cerrada $L$. Para designar la integral curvilínea a lo largo del contorno cerrado $L$ frecuentemente se usa también el símbolo $\oint_{L} X\,dx + Y\,dy$.

**Observación.** Hemos llegado a la noción de la integral curvilínea, considerando el problema sobre el trabajo de una fuerza $\boldsymbol{F}$ en un segmento curvilíneo $L$.

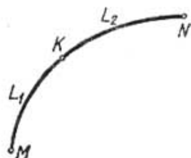


*Fig. 327*

En este caso supongamos que en todos los puntos de la curva $L$ está dada la fuerza $\boldsymbol{F}$ como una función vectorial de las coordenadas del punto de aplicación $(x, y)$; las proyecciones del vector variable $\boldsymbol{F}$ sobre los ejes de coordenadas son iguales a las funciones escalares (es decir, a las numéricas) $X(x, y)$ e $Y(x, y)$. Por esto, una integral curvilínea de la forma $\int_{L} X\,dx + Y\,dy$ podemos considerarla como la integral de la función vectorial $F$ dada por sus proyecciones $X$ y $Y$.

La integral de la función vectorial $\boldsymbol{F}$ a lo largo de la curva $L$ se designa por el símbolo

$$\int_{L} \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{S}.$$

Si el vector $\boldsymbol{F}$ se determina por sus proyecciones $X$, $Y$, $Z$, entonces, esta integral es igual a la integral curvilínea

$$\int_L X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

En particular, si el vector $\boldsymbol{F}$ se encuentra en el plano $Oxy$, la integral de este vector es igual a:

$$\int_L X\,dx + Y\,dy.$$

Cuando la integral curvilínea de una función vectorial $\boldsymbol{F}$ se toma a lo largo de una curva cerrada $L$, esta integral curvilínea se llama *circulación* del vector $\boldsymbol{F}$ a lo largo del contorno cerrado $L$.

## § 2. CALCULO DE LA INTEGRAL CURVILINEA

En este párrafo propongamos precisar la noción del límite de la suma (1), § 1, y, en relación con esto, precisar la noción de la integral curvilínea e indicar el procedimiento de su cálculo.

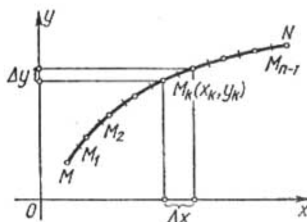



*Fig. 328*

Supongamos que la curva $L$ está dada por las ecuaciones en forma paramétrica:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t).$$

Analicemos el arco $MN$ de esta curva (fig. 328). Sean $\alpha$ y $\beta$ los valores del parámetro correspondientes a los puntos $M$ y $N$. Dividamos el arco $MN$ en elementos parciales $\Delta s_i$, por los puntos $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, . . ., $M_n(x_n, y_n)$, haciendo

$$x_i = \varphi(t_i),\quad y_i = \psi(t_i).$$

Examinemos la integral curvilínea

$$\int_L X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy, \tag{1}$$

definida en el párrafo anterior. Demos aquí sin demostración un **teorema sobre la existencia de la integral curvilínea.** *Si funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son continuas y tienen derivadas continuas $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$*

*sobre el segmento* $[\alpha, \beta]$ *y si, además, las funciones* $X[\varphi(t), \psi(t)]$ *e* $Y[\varphi(t), \psi(t)]$ *son continuas como funciones de t en este segmento entonces existen los límites*

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta x_i = \int X(x, y)\,dx, \\ \lim_{\Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Y(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta y_i = \int Y(x, y)\,dy, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

*donde* $\bar{x}_i$ *e* $\bar{y}_i$ *son las coordenadas de cierto punto del arco* $\Delta s_i$. *Estos límites no dependen del modo de dividir la curva L en arcos parciales* $\Delta s_i$, *cuando* $\Delta s_i \to 0$, *ni de la elección del punto* $M_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ *en el arco* $\Delta s_i$. Estos límites se llaman *integrales curvilíneas* y se representan así:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta x_i = \int_L X(x, y)\,dx,$$

$$\lim_{\Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Y(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta y_i = \int_L Y(x, y)\,dy.$$

**Observación.** Del teorema citado se deduce que hacia un mismo límite (es decir, hacia la integral curvilínea) tienden las sumas, definidas en el párrafo anterior donde los puntos $\bar{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ son los extremos del arco $\Delta s_i$, siendo arbitrario el sistema de división de $L$ en los arcos parciales $\Delta s_i$.

El teorema formulado da la posibilidad de obtener el método para calcular las integrales curvilíneas.

Así, según la definición, tenemos:

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y)\,dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta x_i, \qquad (3)$$

donde

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}).$$

Transformemos la última diferencia según la fórmula de Lagrange:

$$\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)\,\Delta t_i,$$

donde $\tau_i$ es cierto valor de $t$ comprendido entre los valores $t_{i-1}$ y $t_i$. Puesto que el punto $\bar{x}_i, \bar{y}_i$ en el arco $\Delta s_i$ es arbitrario, elijámoslo de modo que sus coordenadas correspondan al valor del parámetro $\tau_i$:

$$\bar{x}_i = \varphi(\tau_1), \quad \bar{y}_i = \psi(\tau_i).$$

Poniendo en la fórmula (3) los valores obtenidos de $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ y $\Delta x_i$,

obtenemos:

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x,\ y)\,dx = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X[\varphi(\tau_i)\,\psi(\tau_i)]\ \varphi'(\tau_i)\,\Delta t_i.$$

El segundo miembro es el límite de una suma integral para la función continua de una sola variable $X[\varphi(t),\ \psi(t)]\ \varphi'(t)$ en el segmento $[\alpha,\ \beta]$.

Por consiguiente, este límite es igual a la integral definida de esta función:

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x,\ y)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} X[\varphi(t),\ \psi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Análogamente, obtenemos la fórmula:

$$\int_{(M)}^{(N)} Y(x,\ y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} Y[\varphi(t),\ \psi(t)]\ \psi'(t)\,dt.$$

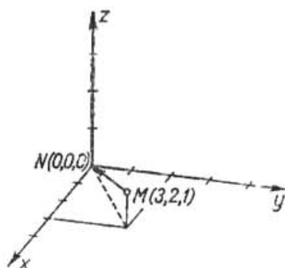


*Fig. 329*

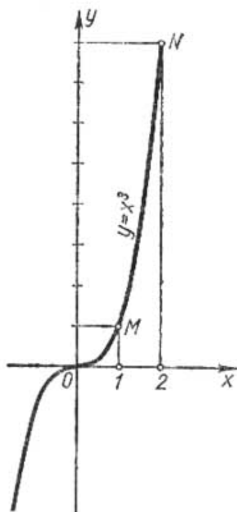


*Fig. 330*

Sumando miembro a miembro estas igualdades, obtenemos:

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x,\ y)\,dx + Y(x,\ y)\,dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{X[\varphi(t),\ \psi(t)]\ \varphi'(t) + Y[\varphi(t),\ \psi(t)]\,\psi'(t)\}\,dt. \quad (4)$$

Esta es la fórmula buscada para calcular una integral curvilínea.

De manera análoga se calcula la integral curvilínea

$$\int X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

a lo largo de una curva en el espacio, dada por las ecuaciones $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t)$.

**Ejemplo 1.** Calcular la integral curvilínea de una terna de funciones: $x^3$; $3zy^2$; $-x^2y$ (o, que es lo mismo, de la función vectorial $x^3i + 3zy^2j - x^2yk$) a lo largo de un segmento de la recta que parte del punto $M$ (3,2,1) al punto $N$ (0, 0, 0) (fig. 329).

**Solución.** Para hallar las ecuaciones paramétricas de la línea $MN$ a lo largo de la cual se debe realizar la integración, escribamos la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados:

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1};$$

designando por $t$ el valor común de todas estas razones, obtenemos las ecuaciones de la recta en forma paramétrica:

$$x=3t,\ y=2t,\ z=t.$$

Es evidente, que al origen del segmento $MN$ corresponde el valor del parámetro $t=1$ y al extremo, el valor de $t=0$. No es difícil hallar las derivadas de $x$, $y$, $z$ respecto al parámetro $t$ (las que necesitaremos para calcular la integral curvilínea):

$$x'_t=3,\ y'_t=2,\ z'_t=1.$$

Ahora podemos calcular la integral curvilínea buscada con ayuda de la fórmula (4):

$$\int_{(M)}^{(N)} x^3\,dx+3zy^2\,dy-x^2y\,dz=$$

$$=\int_1^0 [(3t)^3\cdot 3+3t\,(2t)^2\cdot 2-(3t)^2\cdot 2t\cdot 1]\,dt=\int_1^0 87t^3\,dt=-\frac{87}{4}.$$

**Ejemplo 2.** Calcular la integral curvilínea de un par de funciones: $6x^2y$; $10\,xy^2$, a lo largo de la curva plana $y=x^3$ entre los puntos $M\,(1,\,1)$ y $N\,(2,\,8)$ (fig. 330).

**Solución.** Para calcular la integral buscada

$$\int_{(M)}^{(N)} 6x^2y\,dx+10xy^2\,dy$$

hacen falta las ecuaciones paramétricas de la curva dada. Pero, la ecuación de la curva $y=x^3$ dada explícitamente, es un caso particular de la ecuación paramétrica: aquí, la abscisa $x$ del punto de la curva sirve de parámetro y las ecuaciones paramétricas de la curva son:

$$x=x,\ y=x^3.$$

El parámetro $x$ varía de $x_1=1$ a $x_2=2$. Es fácil calcular las derivadas respecto al parámetro:

$$x'_x=1,\ y'_x=3x^2.$$

Por consiguiente,

$$\int_{(M)}^{(N)} 6x^2y\,dx+10xy^2\,dy=\int_1^2 [6x^2x^3\cdot 1+10xx^6\cdot 3x^2]\,dx=$$

$$=\int_1^2 (6x^5+30x^9)\,dx=[x^6+3x^{10}]_1^2=1084.$$

Mostremos, ahora, algunas aplicaciones de la integral curvilínea.

**1. La expresión del área de un dominio, limitado por una curva limitada, en función de una integral curvilínea.**

Sea dado en el plano $Oxy$ un dominio $D$ limitado por un contorno $L$ tal que toda paralela a uno cualquiera de los ejes de coordenadas y que pasa por algún punto interior del dominio, corte la frontera $L$ no más que en dos puntos (es decir, el dominio $D$ es regular) (fig. 331).

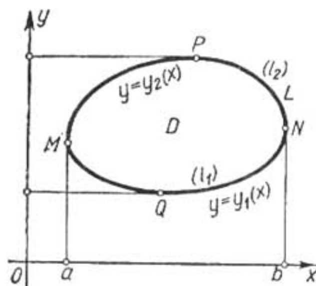



Fig. 331

Supongamos que el segmento $[a, b]$ es la proyección del dominio $D$ sobre el eje $Ox$; abajo $D$ está limitado por la curva $(l_1)$:

$$y = y_1(x)$$

y encima, por la $(l_2)$:

$$y = y_2(x), \quad [y_1(x) \leqslant y_2(x)].$$

Entonces, el área del dominio $D$ es igual a:

$$S = \int_a^b y_2(x)\,dx - \int_a^b y_1(x)\,dx.$$

Pero, la primera integral es una integral curvilínea a lo largo de la curva $l_2$ $(\widehat{MPN})$ puesto que $y = y_2(x)$ es la ecuación de esta curva; por tanto:

$$\int_a^b y_2(x)\,dx = \int_{MPN} y\,dx.$$

La segunda integral es una integral curvilínea a lo largo de la curva $l_1$ $(\widehat{MQN})$, es decir:

$$\int_a^b y_1(x)\,dx = \int_{MQN} y\,dx.$$

En virtud de la propiedad 1 de la integral curvilínea, tenemos:

$$\int_{MPN} y\,dx = -\int_{NPM} y\,dx.$$

Por consiguiente,

$$S = -\int_{NPM} y\,dx - \int_{MQN} y\,dx = -\int_L y\,dx. \tag{5}$$

Tengamos en cuenta que la curva $L$ se recorre **en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.**

Si una parte de la frontera $L$ constituye un segmento $M_1M$, paralelo al eje $Oy$, entonces $\int_{(M_1)}^{(M)} y\,dx = 0$, y la igualdad (5) es válida también para este caso (fig. 332).

De modo semejante podemos demostrar que

$$S = \int_L x\,dy. \tag{6}$$

Sumando miembro a miembro las igualdades (5) y (6) y dividiendo por dos, obtenemos una fórmula más para calcular el área $S$:

$$S = \frac{1}{2}\int_L x\,dy - y\,dx. \tag{7}$$

**Ejemplo 3.** Calcular el área de la elipse

$$x = a\cos t,\ y = b \operatorname{sen} t.$$

**Solución.** Según la fórmula (7) hallamos:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [a\cos t b\cos t - b\operatorname{sen} t\,(-a\operatorname{sen} t)]\,dt = \pi ab.$$

Notemos que la fórmula (7), así como las fórmulas (5) y (6), son válidas también para las áreas de dominios cuyas fronteras se cortan por las paralelas a los ejes de coordenadas en más de dos puntos (fig. 333). Para demostrarlo, dividamos el dominio dado (fig. 333) en dos dominios regulares mediante la línea $l^*$. La fórmula (7) es válida en cada dominio.

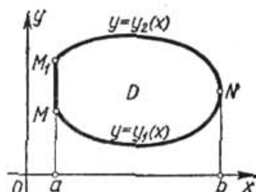


*Fig. 332*

Sumando miembro a miembro, obtenemos en el primer miembro el área del dominio dado y en el segundo, la integral curvilínea $\left(\text{con el coeficiente } \frac{1}{2}\right)$ tomada a lo largo de toda la frontera, puesto que la integral indicada a lo largo de la línea de división $l^*$ se toma dos veces: una vez en el sentido directo, y otra, en el sentido inverso, por lo cual es igual a cero.

**2. Cálculo del trabajo producido por una fuerza variable $F$ en una trayectoria curvilínea L.**

Ya hemos indicado al principio del § 1 que el trabajo de una fuerza $\boldsymbol{F} = X(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Y(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + Z(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$ a lo largo de una curva $L = MN$ es igual a la integral curvilínea:

$$A = \int_{(M)}^{(N)} X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy + Z(x, y, z)\,dz.$$

Analicemos un ejemplo concreto del cálculo del trabajo de una fuerza.




Fig. 333

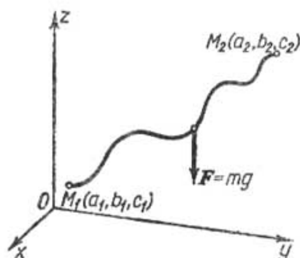



Fig. 334

**Ejemplo 4.** Calcular el trabajo $A$ de la fuerza de gravedad $\boldsymbol{F}$ durante el desplazamiento de masa $m$ del punto $M_1$ $(a_1, b_1, c_1)$ al punto $M_2$ $(a_2, b_2, c_2)$ a lo largo de una trayectoria arbitraria $L$ (fig. 334).

**Solución.** Las proyecciones de la fuerza de gravedad $\boldsymbol{F}$ sobre los ejes de coordenadas son:

$$X = 0, \ Y = 0, \ Z = -mg.$$

Por tanto, el trabajo buscado es:

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int_{c_1}^{c_2} (-mg)\,dz = mg\,(c_1 - c_2).$$

Como se ve, en este caso la integral curvilínea no depende de la trayectoria de integración, sino solamente de las posiciones de los puntos inicial y final. Hablando con mayor precisión, el trabajo de la fuerza de gravedad depende sólo de la diferencia en alturas ocupadas por el punto inicial y por el final.

## § 3. FORMULA DE GREEN

Determinemos la relación entre la integral doble extendida por un dominio plano $D$ y la integral curvilínea a lo largo de la frontera $L$ de este dominio.

Supongamos que en el plano $Oxy$ está dado un dominio $D$ regular tanto en la dirección de $Ox$, como $Oy$, limitado por un contorno cerrado $L$ (fig. 331). Sea este dominio limitado abajo por la curva $y = y_1(x)$ y encima, por la curva $y = y_2(x)$, $y_1(x) \leqslant y_2(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$.

En conjunto estas dos curvas forman el contorno cerrado $L$. Sean dadas en el dominio $D$ dos funciones continuas $X(x, y)$ y $Y(x, y)$, que tienen derivadas parciales continuas. Examinemos la integral

$$\iint_D \frac{\partial X(x, y)}{\partial y}\,dx\,dy.$$

Representándola en la forma de la integral iterada de segundo orden, obtenemos:

$$\iint_D \frac{dX}{dy}\,dx\,dy = \int_a^b \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{dX}{dy}\,dy \right) dx = \int_a^b X(x,\ y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx =$$

$$= \int_a^b [X(x,\ y_2(x)) - X(x,\ y_1(x))]\,dx. \quad (1)$$

Notemos que la integral

$$\int_a^b X(x,\ y_2(x,)\,dx$$

es numéricamente igual a la integral curvilínea

$$\int_{(MPN)} X(x,\ y)\,dx,$$

a lo largo de la curva $MPN$, cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = x, \quad y = y_2(x),$$

donde $x$ es el parámetro.

De este modo,

$$\int_a^b X(x,\ y_2(x))\,dx = \int_{MPN} X(x,\ y)\,dx. \quad (2)$$

Análogamente, la integral

$$\int_a^b X(x,\ y_1(x))\,dx$$

es numéricamente igual a la integral curvilínea a lo largo del arco $MQN$

$$\int_a^b X(x,\ y_1(x))\,dx = \int_{(MQN)} X(x,\ y)\,dx. \quad (3)$$

Sustituyendo las expresiones (2) y (3) en la fórmula (1), obtenemos:

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{MPN} X(x,\ y)\,dx - \int_{MQN} X(x,\ y)\,dx. \quad (4)$$

Pero,

$$\int_{MQN} X(x,\ y)\,dx = -\int_{NQM} X(x,\ y)\,dx$$

(véase § 1, propiedad 1). Por consiguiente, podemos escribir la fórmula (4) en la forma:

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{MPN} X(x,\ y)\,dx + \int_{MQN} X(x,\ y)\,dx.$$

Pero, la suma de las integrales curvilíneas del segundo miembro es igual a la integral curvilínea a lo largo de toda la curva cerrada $L$ en sentido del movimiento de las agujas del reloj. Por tanto, la última igualdad puede ser reducida a la forma:

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{L\ (\text{según las agujas del reloj})} X(x,\ y)\,dx. \qquad (5)$$

Si una parte de la frontera está representada por un segmento $l_3$, paralelo al eje $Oy$, entonces tenemos $\int_{l_3} X(x,\ y)\,dx = 0$ y la ecuación (5) permanece válida también para este caso.

De manera igual hallamos:

$$\iint_D \frac{\partial Y}{\partial x}\,dx\,dy = -\int_{L\ (\text{según las agujas del reloj})} Y(x,\ y)\,dy \qquad (6)$$

Restando (6) de (5), obtenemos:

$$\iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dx\,dy = \int_{L\ (\text{según las agujas del reloj})} X\,dx + Y\,dy.$$

Si el sentido del recorrido del contorno $L$ es inverso al movimiento de las agujas de un reloj, tenemos *):

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_L X\,dx + Y\,dy.$$

Esta es así llamada *fórmula de Green* por nombre de físico y matemático inglés D. Green (1793—1841) **).

---

*) Si en una integral curvilínea por un contorno cerrado $L$ no está indicado el sentido del recorrido, se supone que esto se efectúa a la dirección contraria al movimiento de las agujas del reloj. Se hacen referencias especiales, si el recorrido está realizado en el sentido de las agujas del reloj.

**) Esta fórmula es un caso particular de una fórmula más general, obteda por el matemático ruso M. V. Ostrogradski.

Hemos supuesto que el dominio $D$ es regular. Pero, igual que en el problema del área (véase § 2) se puede demostrar que esta fórmula es válida para cualquier dominio que podemos dividir en los dominios regulares.

## § 4. CONDICIONES PARA QUE UNA INTEGRAL CURVILINEA NO DEPENDA DE LA TRAYECTORIA DE INTEGRACION

Examinemos la integral curvilínea

$$\int_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy,$$

a lo largo de una curva plana $L$ que une los puntos $M$ y $N$. Supongamos que las funciones $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ tienen derivadas parciales continuas en el dominio examinado $D$. Aclaremos las condiciones en las cuales la integral curvilínea no depende de la forma de la curva $L$, sino de la posición de los puntos $M$ y $N$. Analicemos dos curvas arbitrarias, $MPN$ y $MQN$ del dominio examinando $D$ que unen los puntos $M$ y $N$ (fig. 335).

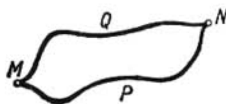


*Fig. 335*

Sea:

$$\int_{MPN} X\,dx + Y\,dy = \int_{MQN} X\,dx + Y\,dy, \tag{1}$$

es decir,

$$\int_{MPN} X\,dx + Y\,dy - \int_{MQN} X\,dx + Y\,dy = 0.$$

Luego, en virtud de las propiedades 1 y 2 de las integrales curvilíneas (§ 1) tenemos:

$$\int_{MPN} X\,dx + Y\,dy + \int_{NQM} X\,dx + Y\,dy = 0,$$

es decir, la integral curvilínea a lo largo del contorno cerrado $L$ es:

$$\int_{L} X\,dx + Y\,dy = 0.$$

En esta última fórmula la integral curvilínea está tomada a lo largo de un contorno cerrado $L$, compuesto de las curvas $MPN$ y y $NQM$. Es evidente que podemos considerar este contorno $L$ como arbitrario.

Por consiguiente, si tenemos la condición de que la integral curvilínea no depende de la forma de la curva que une los dos puntos arbitrarios $M$ y $N$, sino de la posición de éstos, resulta que esta integral a lo largo del contorno cerrado cualquiera es nula.

La conclusión recíproca también es válida: si la integral curvilínea a lo largo de cualquier contorno cerrado es nula, ésta no depende de la forma de la curva que une los dos puntos arbitrarios, sino sólo de la posición de estos puntos. En efecto, de la igualdad (2) se deduce la (1).

En el ejemplo 4, § 2, la integral curvilínea no depende de la trayectoria de integración. En cambio, en el ejemplo 3 la integral curvilínea depende de la trayectoria de integración, puesto que la integral a lo largo del contorno cerrado no es nula, sino da el área limitada por este contorno.

En los ejemplos 1 y 2 las integrales curvilíneas también dependen de la trayectoria de integración.

Naturalmente surge la pregunta: a qué condiciones deben satisfacer las funciones $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ para que la integral curvilínea $\int X\,dx + Y\,dy$ a lo largo de cualquier contorno cerrado sea nula. El teorema siguiente da la respuesta:

**Teorema.** *Sean $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ las dos funciones continuas en todos los puntos de cierto dominio $D$, igual que sus derivadas parciales, $\frac{\partial X(x, y)}{\partial y}$ y $\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x}$. Para que la integral curvilínea a lo largo de un contorno $L$ cerrado cualquiera de este dominio sea nula, es decir, para que*

$$\int_L X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy = 0 \tag{2}$$

*es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad*

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \tag{3}$$

*en todos los puntos del dominio $D$.*

**Demostración.** Examinemos un contorno cerrado arbitrario $L$ en el dominio $D$ y escribamos la fórmula de Green correspondiente a este contorno:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_L X\,dx + Y\,dy.$$

Si la condición (3) se cumple, la integral doble del primer miembro es idénticamente igual a cero y, por consiguiente:

$$\int_L X\,dx + Y\,dy = 0.$$

Queda así demostrado que la condición (3) es **suficiente.**

Demostremos ahora que esta condición es también **necesaria**, o sea, si la igualdad (2) se cumple para cualquier curva cerrada $L$ de $D$, entonces la condición (3) se satisface obligatoriamente en cada punto de este dominio.

Supongamos lo contrario: que se cumple la igualdad (2)

$$\int_L X\,dx + Y\,dy = 0,$$

y no se cumple la condición (3), es decir:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \neq 0,$$

aunque sea en un solo punto. Sea, por ejemplo, la desigualdad en cierto punto $P(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} > 0.$$

Como la función en el primer miembro es continua, ella es positiva y mayor que cierto número $\delta > 0$ en todos los puntos de un dominio $D'$, suficientemente pequeño que contiene el punto $P(x_0, y_0)$. Tomemos la integral doble de la diferencia

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y},$$

por este dominio $D'$. Por supuesto, ella es positiva. En efecto:

$$\iint_{D'} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy > \iint_{D'} \delta\,dx\,dy = \delta \iint_{D'} dx\,dy = \delta D' > 0.$$

Pero, según la fórmula de Green, el primer miembro de la última desigualdad es igual a la integral curvilínea a lo largo de la frontera $L'$ del dominio $D'$, esta integral, según la hipótesis, es nula. Por consiguiente, la última desigualdad contradice a la condición (2) y la suposición, de que la diferencia $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ sea distinta de cero, aunque en un solo punto, es falsa. De aqui se deduce que

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0$$

en todos los puntos del dominio dado $D$.

El teorema queda, pues, completamente demostrado.

En el § 9, cap. XIII (tomo II) hemos demostrado que el cumplimiento de la condición

$$\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial X(x, y)}{\partial y}$$

significa que la expresión $X\,dx + Y\,dy$ es **la diferencial total** de **cierta función** $u(x, y)$, es decir:

$$X\,dx + Y\,dy = du(x, y),$$

siendo:

$$X(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Y(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Pero, en este caso el vector

$$\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

es el gradiente de la función $u(x, y)$; la función $u(x, y)$, cuyo gradiente es igual al vector $X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j}$, se llama *potencial* de este vector.

Demostremos que *en este caso la integral curvilínea* $I = \int\limits_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy$ *a lo largo de cualquier curva* $L$, *que une los puntos* $M$ y $N$, *es igual a la diferencia de los valores de la función* $u$ *en estos puntos*:

$$\int\limits_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy = \int\limits_{(M)}^{(N)} du(x, y) = u(N) - u(M).$$

**Demostración.** Si $X\,dx + Y\,dy$ es la diferencial total de la función $u(x, y)$, entonces $X = \frac{\partial u}{\partial x}$; $Y = \frac{\partial u}{\partial y}$ y la integral curvilínea toma la forma:

$$I = \int\limits_{(M)}^{(N)} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Para calcular esta integral escribamos las ecuaciones paramétricas de la curva $L$ que une los puntos $M$ y $N$:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Supongamos que al valor $t = t_0$ del parámetro corresponde el punto $M$ y al valor $t = T$, el punto $N$. Luego, la integral curvilínea se reduce a la siguiente integral definida:

$$I = \int\limits_{t_0}^{T} \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right] dt.$$

La expresión entre los corchetes es una función de $t$, al mismo tiempo

esta función es la derivada total de la función $u[\varphi(t), \psi(t)]$ respecto a $t$. Por consiguiente:

$$I=\int_{t_0}^{T}\frac{\partial u}{\partial t}\,dt=u[\varphi(t),\ \psi(t)]\Big|_{t_0}^{T}=$$

$$=u[\varphi(t),\ \psi(t)]-u[\varphi(t_0),\ \psi(t_0)]=u(N)-u(M).$$

Como vemos, **la integral curvilínea de una diferencial total no depende de la forma de la curva, a la largo de la cual se efectúa la integración.**

La integral curvilínea a lo largo de una curva en el espacio tiene las mismas propiedades (véase § 7 de este capítulo).

**Observación.** A veces tenemos que analizar las integrales curvilíneas de una cierta función $X(x, y)$ a lo largo de la longitud del arco $L$:

$$\int_L X(x,\ y)\,ds=\lim_{\Delta s_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}X(x_i,\ y_i)\,\Delta s_i, \tag{4}$$

donde $ds$ es la diferencial del arco. Tales integrales se calculan de un modo análogo al usado para las integrales curvilíneas examinadas arriba. Supongamos que la curva $L$ está dada por las ecuaciones paramétricas:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),$$

donde $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ son las funciones continuas de $t$.

Sean $\alpha$ y $\beta$ los valores del parámetro $t$, correspondientes al origen y al extremo final del arco $L$.

Como es

$$ds=\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt,$$

obtenemos fórmula para calcular la integral (4):

$$\int_L X(x,\ y)\,ds=\int_{\alpha}^{\beta}X[\varphi(t),\ \psi(t)]\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt.$$

Podemos examinar la integral curvilínea a lo largo del arco de una curva en el espacio $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$:

$$\int_L X(x,\ y,\ z)\,ds=\int_{\alpha}^{\beta}X[\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)]\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+\chi'(t)^2}\,dt.$$

Con ayuda de las integrales curvilíneas a lo largo del arco podemos determinar, por ejemplo, las coordenadas de los centros de gravedad de diferentes líneas.

Razonando análogamente que en el § 8, cap. XII (tomo I) obtenemos la fórmula para calcular las coordenadas del centro de gravedad de una curva en el espacio:

$$x_c = \frac{\int_L x\,ds}{\int_L ds}, \quad y_c = \frac{\int_L y\,ds}{\int_L ds}, \quad z_c = \frac{\int_L z\,ds}{\int_L ds}. \tag{5}$$

**Ejemplo.** Hallar las coordenadas del centro de gravedad de una espira de un hélice

$$x = a\cos t, \quad y = a\,\mathrm{sen}\,t, \quad z = bt \quad (0 \leqslant t < 2\pi),$$

si su densidad lineal es constante.

**Solución.** Aplicando la fórmula (5), encontramos:

$$x_c = \frac{\int_0^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\,t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt}{\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\,t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt} = \frac{\int_0^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2+b^2}\,dt}{\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}\,dt} =$$

$$= \frac{a\sqrt{a^2+b^2}\cdot 0}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}} = 0.$$

**Análogamente,** $y_c = 0$,

$$z_c = \frac{\int_0^{2\pi} bt\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\,t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b\cdot 4\pi^2\sqrt{a^2+b^2}}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}} = \pi b.$$

Así, las coordenadas del centro de gravedad de una espira del hélice son:

$$x_c = 0, \quad y_c = 0, \quad z_c = \pi b.$$

## § 5. INTEGRAL DE SUPERFICIE

Sea dado en el sistema de coordenadas rectangulares $Oxyz$ un dominio $V$ y sea $\sigma$ una superficie limitada por una curva $\lambda$ en el espacio.

Respecto a la superficie $\sigma$, supongamos que en cada su punto $P$ la dirección positiva de la normal se determina por el vector unitario $\boldsymbol{n}(P)$, cuyos cosenos directores son funciones continuas de las coordenadas de los puntos de la superficie.

Supongamos que en cada punto de la superficie está determinado un vector

$$\boldsymbol{F} = X(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Y(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + Z(x, y, z)\,\boldsymbol{k},$$

donde $X$, $Y$, $Z$, son las funciones continuas de las coordenadas. Dividamos arbitrariamente la superficie en los dominios o áreas elementales $\Delta\sigma_i$. En cada una de estas áreas tomemos un punto

arbitrario $P_i$ y formemos la suma

$$\sum_i (\boldsymbol{F}(P_i)\, \boldsymbol{n}(P_i))\, \Delta\sigma_i, \qquad (1)$$

donde:

$\boldsymbol{F}(P_i)$ es el valor del vector $\boldsymbol{F}$ en el punto $P_i$ del área elemental $\Delta\sigma_i$, $\boldsymbol{n}(P_i)$ es el vector unitario de la normal en este punto; $\boldsymbol{Fn}$ es el producto escalar de estos vectores.

El límite de la suma (1), extendida por todas las áreas $\Delta\sigma_i$, cuando los diámetros de todas estas áreas tienden a cero, se llama *integral de superficie* y se designa por el símbolo

$$\iint_\sigma \boldsymbol{Fn}\, d\sigma.$$

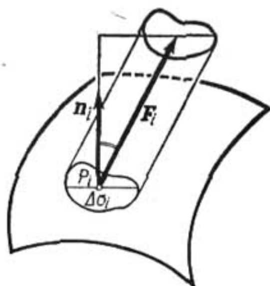



*Fig. 336*

Así, según la definición *) tenemos:

$$\lim_{\text{diám}\, \Delta\sigma_i \to 0} \sum \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{n}_i \Delta\sigma_i = \iint_\sigma \boldsymbol{Fn}\, d\sigma. \qquad (2)$$

Cada término de la suma (1):

$$\boldsymbol{F}_i \boldsymbol{n}_i\, \Delta\sigma_i = F_i\, \Delta\sigma_i \cos(\boldsymbol{n}_i, \boldsymbol{F}_i) \qquad (3)$$

tiene la siguiente interpretación mecánica: este producto es igual al volumen de un cilindro de base $\Delta\sigma_i$ y altura $F_i \cos(\boldsymbol{n}_i, \boldsymbol{F}_i)$. Si el vector $\boldsymbol{F}$ es la velocidad de un líquido que corre por la siperficie $\sigma$, el producto (3) es igual a la cantidad del líquido que pasa por $\Delta\sigma_i$ en una unidad de tiempo, en la dirección del vector $\boldsymbol{n}_i$ (fig. 336).

Sí $\boldsymbol{F}$ es el vector de velocidad del líquido en un punto dado, la expresión $\iint_\sigma \boldsymbol{Fn}\, d\sigma$ designa la cantidad total de líquido que corre por la superficie $\sigma$ en la dirección positiva en una unidad de tiempo. Por eso, la integral de superficie (2) se llama, también, *flujo del campo vectorial* $\boldsymbol{F}$ *a través de la superficie* $\sigma$.

De la definición de integral de superficie se deduce que si dividimos la superficie $\sigma$ en las partes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ obtenemos:

$$\iint_\sigma \boldsymbol{Fn}\, d\sigma = \iint_{\sigma_1} \boldsymbol{Fn}\, d\sigma + \iint_{\sigma_2} \boldsymbol{Fn}\, d\sigma + \ldots + \iint_{\sigma_k} \boldsymbol{Fn}\, d\sigma.$$

Representemos el vector unitario $\boldsymbol{n}$ mediante sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas:

$$\boldsymbol{n} = \cos(n, x)\, \boldsymbol{i} + \cos(n, y)\, \boldsymbol{j} + \cos(n, z)\, \boldsymbol{k}.$$

*) Si la superficie $\sigma$ es tal que en cada uno de sus puntos un plano tangente varía continuamente su posición en función del desplazamiento del punto $P$ por la superficie, y si la función vectorial $\boldsymbol{F}$ es continua en esta superficie, entonces este límite existe (admitamos sin demostración este teorema de la existencia de las integrales de superficie).

Poniendo en la integral (2) expresiones de los vectores de $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{n}$ en función de sus proyecciones, obtenemos:

$$\iint_\sigma \boldsymbol{F}\boldsymbol{n}\, d\sigma = \iint_\sigma [X \cos(n,\ x) + Y \cos(n,\ y) + Z \cos(n,\ z)]\, d\sigma. \quad (2')$$

El producto $\Delta\sigma \cos(n,\ z)$ es la proyección del área elemental $\Delta\sigma$ sobre el plano $Oxy$ (fig. 337); afirmación análoga es válida también para otros productos

$$\Delta\sigma \cos(n,\ x) = \Delta\sigma_{yz}, \quad \Delta\sigma \cos(n,\ y) = \Delta\sigma_{xz},$$
$$\Delta\sigma \cos(n,\ z) = \Delta\sigma_{xy}, \quad (4)$$

donde $\Delta\sigma_{yz}$, $\Delta\sigma_{xz}$, $\Delta\sigma_{xy}$ son las proyecciones de área elemental $\Delta\sigma$ sobre los planos de coordenadas correspondientes.

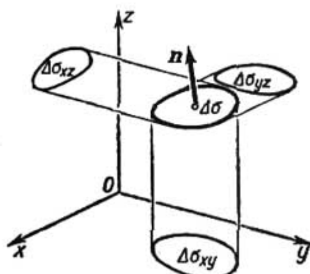



*Fig. 337*

En virtud de lo expuesto, la integral (2′) podemos escribir también en la forma:

$$\iint_\sigma \boldsymbol{F}\boldsymbol{n}\, d\sigma = \iint_\sigma [X \cos(n,\ x) + Y \cos(n,\ y) + Z \cos(n,\ z)]\, d\sigma =$$
$$= \iint_\sigma X\, dy\, dz + Y\, dz\, dx + Z\, dx\, dy. \quad (2'')$$

## § 6. CALCULO DE LA INTEGRAL DE SUPERFICIE

El cálculo de una integral por una superficie curvada se reduce al cálculo de una integral doble por un dominio plano.

Indiquemos, por ejemplo, un procedimiento del cálculo de la integral

$$\iint_\sigma Z \cos(n,\ z)\, d\sigma.$$

Supongamos que la superficie $\sigma$ es tal que toda paralela al eje $Oz$ la corta en un solo punto. Por tanto, podemos escribir la ecuación

de la superficie en la forma:

$$z = f(x, y).$$

Designando por $D$ la proyección de la superficie $\sigma$ sobre el plano $Oxy$, obtenemos (en virtud de la definición de la integral de superficie):

$$\iint_{\sigma} Z(x, y, z)\cos(n, z)\, d\delta = \lim_{\text{diám}\,\Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Z(x_i, y_i, z_i)\cos(n_i, z)\Delta\sigma_i.$$

Tomando en cuenta la última de las fórmulas (4) § 5, obtenemos:

$$\iint_{\sigma} Z\cos(n, z)\, d\sigma = \lim_{\text{diám}\,\Delta\sigma_{xy} \to 0} \sum_{i=1}^{n} Z(x_i, y_i, f(x_i, y_i)(\Delta\sigma_{xy})_i =$$

$$= \pm \lim_{\text{diám}\,\Delta\sigma \to 0} \sum_{i=1}^{n} Z(x_i, y_i, f(x_i, y_i)) |\Delta\sigma_{xy}|_i,$$

la última expresión es una suma integral para la integral doble de la función $Z(x, y, f(x, y))$ por el dominio $D$. Por consiguiente:

$$\iint_{\sigma} Z\cos(n, z)\, d\sigma = \pm \iint_{D} Z(x, y, f(x, y))\, dx\, dy.$$

El signo «más» delante de la integral doble se pone, cuando $\cos(n, z) \geqslant 0$, y el signo «menos», cuando $\cos(n, z) \leqslant 0$.

Si la superficie $\sigma$ no satisface a la condición indicada al principio de este párrafo, entonces, es preciso dividirla en partes, que le satisfagan a está condición, y calcular la integral por cada parte separadamente.

De modo análogo calculamos las integrales

$$\iint_{\sigma} X\cos(n, x)\, d\sigma; \qquad \iint_{\sigma} Y\cos(n, y)\, d\sigma.$$

Lo demostrado anteriormente justifica la expresión de una integral de superficie en la forma (2″) § 5. El segundo miembro de la igualdad (2″) se puede considerar como una suma de integrales dobles por las proyecciones correspondientes del dominio $\sigma$. Los signos de estas integrales dobles (o sea, los signos de los productos $dy\,dz$, $dx\,dz$, $dx\,dy$) se toman de acuerdo con la regla indicada arriba.

**Ejemplo 1.** Sea $\sigma$ una superficie cerrada tal que toda paralela al eje $Oz$ la corta no más que en dos puntos.

Examinemos la integral

$$\iint_{\sigma} z\cos(n, z)\, d\sigma.$$

Tomemos la normal exterior por la dirección positiva de la normal. En el caso dado podemos dividir la superficie en dos partes, inferior y superior, de

ecuaciones correspondientes:

$$z = f_1(x, y) \text{ y } z = f_2(x, y).$$

Designemos por $D$ la proyección de $\sigma$ sobre el plano $Oxy$ (fig. 338); entonces:

$$\iint\limits_{\sigma} z \cos(n, z)\, d\sigma = \iint\limits_{D} f_2(x, y)\, dx\, dy - \iint\limits_{D} f_1(x, y)\, dx\, dy.$$

La segunda integral tiene el signo «menos» puesto que en la integral de superficie el signo del producto $dx\, dy$ en la superficie $z = f_1(x, y)$ debe tomarse negativo, siendo negativo $\cos(n, z)$ para esta superficie.

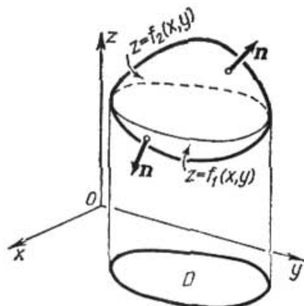



Fig. 338

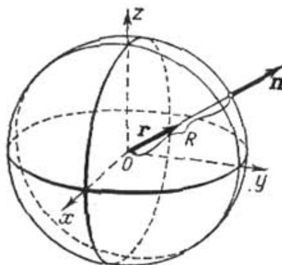



Fig. 339

Pero, la diferencia de las integrales del segundo miembro de la última fórmula representa el volumen limitado por la superficie $\sigma$. Entonces el volumen de un cuerpo, limitado por la superficie cerrada $\sigma$, es igual a la siguiente integral de superficie:

$$V = \iint\limits_{\sigma} z \cos(n, z)\, d\sigma.$$

**Ejemplo 2.** Una carga eléctrica positiva $e$, colocada en el origen de coordenadas, genera un campo vectorial tal que, según la ley de Coulomb, en cada punto del espacio se determina el vector $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{F} = k \frac{e}{r^2} \boldsymbol{r},$$

donde $r$ es la distancia del punto examinado al origen de coordenadas; $\boldsymbol{r}$ es el vector unitario dirigido a lo largo del radio vector del punto dado (fig. 339); $k$ es un factor constante.

Determinar el flujo del campo vectorial a través de una esfera de radio $R$ y centro en el origen de coordenadas.

**Solución.** Tomando en cuenta que $r = R = \text{const}$, tenemos:

$$\iint\limits_{\sigma} k \frac{e}{r^2} \boldsymbol{rn}\, d\sigma = \frac{ke}{R^2} \iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{rn}\, d\sigma.$$

Pero, la última integral es igual al área de la superficie $\sigma$. En efecto, según

a definición de integral (teniendo en cuenta que $\boldsymbol{rn}=1$), obtenemos:

$$\iint_{\sigma} \boldsymbol{rn}\, d\sigma = \lim_{\Delta\sigma_k \to 0} \sum r_k n_k \Delta\sigma_k = \lim_{\Delta\sigma_k \to 0} \sum \Delta\sigma_k = \sigma.$$

Por tanto, el flujo buscado es $\frac{ke}{R^2}\sigma = \frac{ke}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = 4\pi ke.$

## § 7. FORMULA DE STOKES

Supongamos que tenemos superficie $\sigma$ tal, que toda paralela al eje $Oz$ la corta en un solo punto. Designemos por $\lambda$ la frontera de $\sigma$. Tomemos la dirección positiva de la normal $\boldsymbol{n}$ de modo tal que ésta forme con la dirección positiva del eje $Oz$ un ángulo agudo (fig. 340).

Sea $z = f(x, y)$ la ecuación de la superficie. Los cosenos directores de la normal se expresan mediante las fórmulas (véase § 6, cap. IX, tomo I):

$$\left.\begin{aligned}
\cos(n, x) &= \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}};\\
\cos(n, y) &= \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}};\\
\cos(n, z) &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Supongamos que todos los puntos de $\sigma$ pertenecen a un cierto dominio $V$. Sea dada en el dominio $V$ una función continua $X(x, y, z)$, siendo continuas, también, sus derivadas parciales de primer orden, examinemos la integral curvilínea a lo largo de la curva $\lambda$

$$\int_{\lambda} X(x, y, z)\, dx.$$

En la curva $\lambda$ tenemos la igualdad $z = f(x, y)$, donde $x$ e $y$ son las coordenadas de los puntos de la línea $L$ que es la proyección de $\lambda$ sobre el plano $Oxy$ (fig. 340). Por consiguiente, podemos escribir la igualdad

$$\int_{\lambda} X(x, y, z)\, dx = \int_{L} X(x, y, f(x, y))\, dx. \quad (2)$$

La última integral es curvilínea a lo largo de $L$. Transformémosla según la fórmula de Green, haciendo:

$$X(x, y, f(x, y)) = \overline{X}(x, y), \qquad 0 = \overline{Y}(x, y).$$

Sustituyendo en la fórmula de Green $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ por sus expresiones. obtenemos:

$$-\iint_D \frac{\partial X(x, y, f(x, y))}{\partial y}\,dx\,dy = \int_L X(x, y, f(x, y))\,dx, \qquad (3)$$

donde el dominio $D$ está limitado por la curva $L$. A base de la derivada de la función compuesta $X(x, y, f(x, y))$ en la que $y$ entra tanto directamente, como mediante la función $z = f(x, y)$, hallemos:

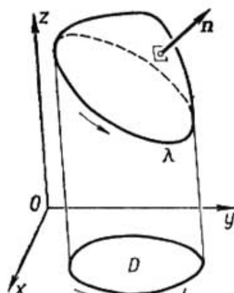


*Fig. 340*

$$\frac{\partial X(x, y, f(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z}\,\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}. \qquad (4)$$

Sustituyendo la expresión (4) en el primer miembro de (3), obtenemos:

$$-\iint_D \left[\frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z}\,\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right] dx\,dy = \int_L X(x, y, f(x, y))\,dx.$$

Tomando en cuenta la igualdad (2), se puede escribir la última ecuación en la forma:

$$\int_\lambda X(x, y, z)\,dx = -\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy - \iint_D \frac{\partial X}{\partial z}\,\frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy. \qquad (5)$$

Las dos últimas integrales se transforman en las integrales de superficie. Efectivamente, de la fórmula (2''), § 5 se deduce que, si tenemos una cierta función $A(x, y, z)$, se verifica la igualdad:

$$\iint_\sigma A(x, y, z)\cos(n, z)\,d\sigma = \iint_D A\,dx\,dy.$$

En virtud de esta igualdad, las integrales del segundo miembro de

la igualdad (5) se transforman del modo siguiente:

$$\left.\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy &= \iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial y}\cos(n,\ z)\,d\sigma, \\ \iint_D \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy &= \iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\cos(n,\ z)\,d\sigma. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Transformemos la última integral empleando las fórmulas (1) del párrafo presente: dividiendo miembro a miembro la segunda de estas igualdades por la tercera, hallamos:

$$\frac{\cos(n,\ y)}{\cos(n,\ z)} = -\frac{\partial f}{\partial y},$$

o sea,

$$\frac{\partial f}{\partial y}\cos(n,\ z) = -\cos(n,\ y).$$

Por consiguiente,

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy = -\iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial z}\cos(n,\ y)\,d\sigma. \qquad (7)$$

Poniendo las expresiones (6) y (7) en la ecuación (5), obtenemos:

$$\int_\lambda X(x,\ y,\ z)\,dx = -\iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial y}\cos(n,\ z)\,d\sigma + \iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial z}\cos(n,\ y)\,d\sigma. \qquad (8)$$

El sentido del recorrido del contorno $\lambda$ debe ser acordado con la dirección elegida de la normal positiva $n$. Es decir, si un observador mira desde el extremo de la normal, él ve que el recorrido a lo largo de $\lambda$ se realiza contra el movimiento de las agujas del reloj.

La fórmula (8) es válida para toda superficie, siempre y cuando puede dividirse en partes, cuyas ecuaciones tengan la forma $z = f(x,\ y)$.

Análogamente, podemos escribir las fórmulas:

$$\int_\lambda Y(x,\ y,\ z)\,dy = \iint_\sigma \left[-\frac{\partial Y}{\partial z}\cos(n,\ x) + \frac{\partial Y}{\partial x}\cos(n,\ z)\right]d\sigma, \qquad (8')$$

$$\int_\lambda Z(x,\ y,\ z)\,dz = \iint_\sigma \left[-\frac{\partial Z}{\partial x}\cos(n,\ y) + \frac{\partial Z}{\partial y}\cos(n,\ x)\right]d\sigma. \qquad (8'')$$

Sumando miembro a miembro las igualdades (8), (8′), (8″), obtenemos la fórmula:

$$\int X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \iint_{\sigma} \left[ \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos(n, z) + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos(n, y) \right] d\sigma. \quad (9)$$

Esta es así llamada *fórmula de Stokes* [físico y matemático inglés D. Stokes (1819—1903)].

Esta fórmula establece la dependencia entre la integral de superficie $\sigma$ y la integral curvilínea a lo largo de la frontera $\lambda$ de $\sigma$, siendo recorrida $\lambda$ según la regla indicada arriba.

El vector $B$ determinado por las proyecciones

$$B_x = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}; \quad B_y = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}; \quad B = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y},$$

se llama *rotacional* de la función vectorial $\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$ y se designa por el símbolo rot $\boldsymbol{F}$.

Por tanto, en fórmula **vectorial** la fórmula (9) toma la forma:

$$\int_{\lambda} \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{s} = \iint_{\sigma} \boldsymbol{n}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}\,d\sigma, \quad (9')$$

y podemos enunciar el teorema de Stokes así.

*La circulación de un vector a lo largo de un contorno cerrado que limita una superficie es igual al flujo de su rotacional a través de esta superficie.*

**Observación.** Si la superficie $\sigma$ es una parte del plano, paralelo al $Oxy$, entonces $\Delta z = 0$, y obtenemos ya la fórmula de Green, como caso particular de la de Stokes.

De la fórmula (9) se deduce que si

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

la integral curvilínea a lo largo de toda curva cerrada $\lambda$ en el espacio es nula:

$$\int_{\lambda} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0. \quad (11)$$

Entonces, podemos decir que aquí la integral curvilínea no depende de la forma de la curva de integración.

Igual que en el caso de una curva plana podemos mostrar que, para el cumplimiento de la igualdad (11), las condiciones (10) no sólo son suficientes, sino también necesarias.

Después de satisfacer estas condiciones, el elemento de integración es la diferencial total de cierta función $u(x, y, z)$:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = du(x, y, z)$$

y, por tanto,

$$\int_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int_{(M)}^{(N)} du = u(N) - u(M).$$

Esto se demuestra igual que la fórmula correspondiente para una función de dos variables (véase § 4).

**Ejemplo 1.** Escribamos las ecuaciones fundamentales de la dinámica de un punto material:

$$m\frac{dv_x}{dt} = X;\quad m\frac{dv_y}{dt} = Y;\quad m\frac{dv_z}{dt} = Z.$$

Aquí, $m$ es la masa del punto; $X$, $Y$, $Z$ son proyecciones sobre los ejes de coordenadas de la fuerza aplicada al punto;

$$v_x = \frac{dx}{dt},\quad v_y = \frac{dy}{dt},\quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

son proyecciones de la velocidad $v$ sobre los ejes de coordenadas. Multipliquemos los dos miembros de las ecuaciones escritas por las expresiones

$$v_x\,dt = dx,\quad v_y\,dt = dy,\quad v_z\,dt = dz.$$

Al sumar las igualdades miembro a miembro, obtenemos:

$$m(v_x\,dv_x + v_y\,dv_y + v_z\,dv_z) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz;$$

$$m\frac{1}{2}d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Puesto que $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$, podemos escribir:

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Calculemos la integral a lo largo de la trayectoria que une los puntos $M_1$ y $M_2$:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{(M_1)}^{(M_2)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

donde $v_1$ y $v_2$ son las velocidades en los puntos $M_1$ y $M_2$.

La última igualdad expresa el teorema de las fuerzas vivas: el incremento de la energía cinética durante el paso de un punto al otro es igual al trabajo de la fuerza que actúa sobre la masa $m$.

**Ejemplo 2.** Determinar el trabajo de la fuerza de atracción newtoniana hacia un centro inmóvil de una masa $m$ durante el desplazamiento de una masa unitaria desde la posición $M_1(a_1, b_1, c_1)$ a la $M_2(a_2, b_2, c_2)$.

**Solución.** Supongamos que el origen de coordenadas se encuentra en el centro inmóvil de atracción. Designemos por $r$ el radio vector del punto $M$

(fig. 341) que corresponde a una posición arbitraria de la masa unitaria, y por $\boldsymbol{r}^0$, el vector unitario orientado a lo largo del vector $\boldsymbol{r}$. Entonces

$$\boldsymbol{F} = -\frac{km}{r^2}\boldsymbol{r}^0,$$

donde $k$ es la constante universal de gravitación. Las proyecciones de la fuerza $\boldsymbol{F}$ sobre los ejes de coordenadas son:

$$X = -km\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}; \quad Y = -km\frac{1}{r^2}\frac{y}{r},$$

$$Z = -km\frac{1}{r^2}\frac{z}{r}.$$

*Fig. 341*

Luego el trabajo de la fuerza $\boldsymbol{F}$ en la trayectoria $M_1M_2$ es igual a:

$$A = -km\int_{(M_1)}^{(M_2)}\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r^3} =$$

$$= -km\int_{(M_1)}^{(M_2)}\frac{r\,dr}{r^3} = km\int_{(M_1)}^{(M_2)} d\left(\frac{1}{r}\right),$$

(puesto que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; $r\,dr = x\,dx + y\,dy + z\,dz$). Designando por $r_1$ y $r_2$ las longitudes de radios vectores de los puntos $M_1$ y $M_2$, obtenemos:

$$A = km\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

De modo que, en este caso, la integral curvilínea tampoco depende de la forma de la curva de integración, sino de las posiciones de los puntos inicial y final. La función $u = \frac{km}{r}$ se llama *potencial* del campo de atracción, generado por la masa $m$. En el caso dado

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$A = u(M_2) - u(M_1),$$

es decir, el trabajo para desplazar la masa unitaria es igual a la diferencia entre los valores de la potencial en los puntos inicial y final.

## § 8. FORMULA DE OSTROGRADSKI

Sea dado en el espacio un dominio regular tridimensional $V$, limitado por una superficie cerrada $\sigma$; la proyección de $V$ sobre el plano $Oxy$ da el dominio bidimensional regular $D$. Supongamos que se puede dividir la superficie $\sigma$ en tres partes $\sigma_1$, $\sigma_2$ y $\sigma_3$ de modo que las ecuaciones de las dos primeras tengan la forma:

$$z = f_1(x, y) \quad \text{y} \quad z = f_2(x, y),$$

donde $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$ son las funciones continuas en el dominio $D$, y la tercera parte, $\sigma_3$, es una superficie cilíndrica con la generatriz paralela al eje $Oz$.

Examinemos la integral

$$I = \iiint\limits_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z}\, dx\, dy\, dz.$$

Al principio, integremos respecto a $z$:

$$I = \iint\limits_D \left( \int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial Z}{\partial z}\, dz \right) dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_D Z(x, y, f_2(x, y))\, dx\, dy - \iint\limits_D Z(x, y, f_1(x, y))\, dx\, dy. \quad (1)$$

Definamos en la normal a la superficie la dirección determinada, a saber, la dirección que coincide con la de la normal exterior a la superficie $\sigma$. Entonces, $\cos(n, z)$ en la superficie $\sigma_2$ es positivo, en la $\sigma_1$ es negativo y en la superficie $\sigma_3$ es nulo.

Las integrales dobles del segundo miembro de la igualdad (1) son iguales a las integrales correspondientes de superficie

$$\iint\limits_D Z(x, y, f_2(x, y))\, dx\, dy = \iint\limits_{\sigma_2} Z(x, y, z) \cos(n, z)\, d\sigma, \quad (2')$$

$$\iint\limits_D Z(x, y, f_1(x, y))\, dx\, dy = \iint\limits_{\sigma_1} Z(x, y, z)(-\cos(n, z))\, d\sigma.$$

En la última integral hemos puesto $(-\cos(n, z))$ por que los elementos de las superficies $\sigma_1$ y $\sigma_2$ y el elemento del área $\Delta s$ del dominio $D$ están ligados por la correlación $\Delta s = \Delta\sigma\, [-\cos(n, z)]$, puesto que el ángulo $(n, z)$ es obtuso.

Así,

$$\iint\limits_D Z(x, y, f_1(x, y))\, dx\, dy = -\iint\limits_{\sigma_1} Z(x, y, f_1(x, y)) \cos(n, z)\, d\sigma. \quad (2'')$$

Sustituyendo (2′) y (2″) en la igualdad (1), tenemos:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint\limits_{\sigma_2} Z(x, y, z) \cos(n, z)\, d\sigma + \iint\limits_{\sigma_1} Z(x, y, z) \cos(n, z)\, d\sigma.$$

Para comodidad de los cálculos ulteriores, escribamos la última ecuación en la forma (sumado $\iint\limits_{\sigma_3} Z(x, y, z) \cos nz\, d\sigma = 0$, puesto

que en la superficie $\sigma_3$ se verifica la igualdad $\cos nz = 0$):

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_{\sigma_2} Z\cos(n, z)\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma_1} Z\cos(n, z)\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma_3} Z\cos(n, z)\,d\sigma.$$

Pero, la suma de las integrales del segundo miembro de la última igualdad es igual a la integral extendida por toda la superficie cerrada $\sigma$, por consiguiente:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Z}{\partial z} dx\,dy\,dz = \iint\limits_\sigma Z(x, y, z)\cos(n, z)\,d\sigma.$$

De un modo semejante, obtenemos las correlaciones:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Y}{\partial y} dx\,dy\,dz = \iint\limits_\sigma Y(x, y, z)\cos(n, y)\,d\sigma,$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial X}{\partial x} dx\,dy\,dz = \iint\limits_\sigma X(x, y, z)\cos(n, x)\,d\sigma.$$

Sumando miembro a miembro las tres últimas ecuaciones, obtenemos *la fórmula de Ostrogradski* *):

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_\sigma (X\cos(n, x) + Y\cos(n, y) + Z\cos(n, z))\,d\sigma. \qquad (2)$$

La expresión $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ se llama *divergencia* del vector (o sea, divergencia de la función vectorial)

$$\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$$

y se designa por el símbolo div $\boldsymbol{F}$:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

*) Esta fórmula (llamada también de Ostrogradski — Gauss) fue obtenida por el célebre matemático ruso M. V. Ostrogradski (1801—1861) y publicada por él en 1828 en el artículo «Notas sobre la teoría del calor».

Indiquemos que esta fórmula es válida para todo dominio que puede ser dividido en dominios parciales que satisfacen a las condiciones expuestas al principio del párrafo corriente.

Demos una interpretación hidromecánica de la fórmula obtenida. Supongamos que $\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$ es el vector de velocidad de un líquido que corre a través del dominio $V$. En este caso, la integral de superficie en la fórmula (2) es la integral de la proyección del vector $\boldsymbol{F}$ sobre la normal exterior $\boldsymbol{n}$; esta integral da la cantidad del líquido que sale de $V$ a través de la superficie $\sigma$ en una unidad de tiempo (o que entra en el dominio $V$, si la integral es negativa). Esta cantidad se expresa mediante la integral triple de div $\boldsymbol{F}$.

Si div $\boldsymbol{F} \equiv 0$, la integral doble extendida por toda la superficie cerrada es nula, es decir, la cantidad del líquido que sale (o entra) a través de toda la superficie cerrada $\sigma$ es igual a cero (no hay fuentes). Hablando con mayor precisión, la cantidad del líquido que entra en el interior del dominio es igual a la que sale de éste.

En forma vectorial la fórmula de Ostrogradski se escribe así:

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dv = \iint\limits_\sigma \boldsymbol{F}\boldsymbol{n}\, ds \tag{1'}$$

y se anuncia diciendo: *la integral de la divergencia de un campo vectorial* $\boldsymbol{F}$, *extendida por cierto volumen, es igual al flujo del vector a través de la superficie que limita este volumen.*

## § 9. OPERADOR DE HAMILTON Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES

Sea una función $u = u(x, y, z)$. En cada punto del dominio donde está definida y derivada la función $u(x, y, z)$ se determina el gradiente:

$$\operatorname{grad} u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{1}$$

El gradiente de la función $u(x, y, z)$ se designa, a veces, de la manera siguiente:

$$\nabla u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}; \tag{2}$$

el signo $\nabla$ es una delta invertida y se llama «nabla».

1) Es cómodo escribir la ecuación (2) en la forma simbólica:

$$\nabla u = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) u \tag{2'}$$

y considerar el símbolo

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3}$$

como un «vector simbólico». Este vector simbólico se llama *hamiltoniano* u *operador de Hamilton*, o, simplemente, nabla ($\nabla$ — operador). De las fórmulas (2) y (2′) se deduce que, al «multiplicar» el vector simbólico $\nabla$ por la función escalar $u$, obtenemos el gradiente de esta función:

$$\nabla u = \text{grad } u. \tag{4}$$

2) Podemos formar un producto escalar del vector simbólico $\nabla$ por el vector $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z$:

$$\nabla \boldsymbol{F} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}X + \frac{\partial}{\partial y}Y + \frac{\partial}{\partial z}Z = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \text{div } \boldsymbol{F}$$

(véase el § 8). Así,

$$\nabla \boldsymbol{F} = \text{div } \boldsymbol{F}. \tag{5}$$

3) Formemos un producto escalar del vector simbólico $\nabla$ por el vector $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z$:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z) =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Y & Z \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Z \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ X & Y \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) - \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) =$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = \text{rot } \boldsymbol{F}$$

(véase el § 7). Así,

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \text{rot } \boldsymbol{F}. \tag{6}$$

De lo expuesto se deduce que el uso del vector simbólico $\nabla$ nos permite expresar las operaciones vectoriales de una manera muy breve. Examinemos unas cuantas fórmulas más.

4) El campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z$ se llama *campo vectorial potencial*, si el vector $\boldsymbol{F}$ es el gradiente de cierta

función escalar $u\ (x,\ y,\ z)$:

$$\boldsymbol{F} = \text{grad } u,$$

o sea,

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

En este caso, las proyecciones del vector $\boldsymbol{F}$ son:

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

De estas igualdades se deduce (véase § 12, cap. VIII, tomo I):

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}$$

ó

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0.$$

Por consiguiente, para el vector examinado $\boldsymbol{F}$ tenemos:

$$\text{rot } \boldsymbol{F} = 0.$$

Así, obtenemos:

$$\text{rot (grad } u) = 0. \tag{7}$$

Aplicando $\nabla$ — operador, en virtud de las fórmulas (4) y (6), podemos escribir la igualdad (7) así:

$$(\nabla \times \nabla u) = 0. \tag{7'}$$

Usando la propiedad de que, para multiplicar un producto vectorial por un escalar es suficiente multiplicar esta magnitud escalar por uno de los factores, escribamos:

$$(\nabla \times \nabla)\ u = 0. \tag{7''}$$

Aquí, el operador $\nabla$ de nuevo tiene las propiedades de un vector ordinario: el producto vectorial de un vector por sí mismo es nulo.

El campo vectorial $\boldsymbol{F}\ (x,\ y,\ z)$ para que rot $\boldsymbol{F} = 0$ se llama *irrotacional*. De la igualdad (7) se deduce que todo campo potencial es irrotacional.

La conclusión inversa también es válida: si algún campo vectorial $\boldsymbol{F}$ es irrotacional, es también potencial. Esta afirmación es correcta, lo que se deduce de los razonamientos dados en el final del § 7.

5) El campo vectorial $\boldsymbol{F}\ (x,\ y,\ z)$, para que div $\boldsymbol{F} = 0$, es decir, el campo vectorial que no tiene fuentes (véase el § 8) se llama *solenoidal*.

Demostremos que

$$\text{div (rot } \boldsymbol{F}) = 0, \tag{8}$$

es decir, que el campo de rotacionales es libre de fuentes.

En efecto, si $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z$, entonces:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

y por esto:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0.$$

Aplicado el $\nabla$ — operador, escribamos la igualdad (8) en la forma:

$$\nabla\,(\nabla \times \boldsymbol{F}) = 0. \tag{8'}$$

El primer miembro de esta igualdad lo podemos considerar como un producto vectorial y escalar (mixto) de los tres vectores: $\nabla$, $\nabla$, $\boldsymbol{F}$, dos de los cuales son iguales. Es evidente que este producto es nulo.

6) Sea un campo escalar $u = u\,(x,\ y,\ z)$. Determinemos el campo de gradientes:

$$\operatorname{grad} u = \boldsymbol{i}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\,\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Ahora hallemos:

$$\operatorname{div}\,(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

ó

$$\operatorname{div}\,(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{9}$$

El segundo miembro de esta expresión se llama *operador de Laplace* de la función $u$ y se designa

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{10}$$

Por consiguiente, podemos escribir la igualdad (9) en la forma:

$$\operatorname{div}\,(\operatorname{grad} u) = \Delta u. \tag{11}$$

Con ayuda del $\nabla$ — operador escribamos la ecuación (11):

$$(\nabla \nabla u) = \Delta u. \tag{11'}$$

Notemos que la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (12)$$

ó

$$\Delta u = 0 \qquad (12')$$

se llama *ecuación de Laplace*. La función que satisface a esta ecuación se llama *función armónica.*

### Ejercicios para el capítulo XV

Calcular las integrales curvilíneas siguientes:

1. $\int y^2\,dx+2xy\,dy$ a lo largo de la circunferencia $x=a\cos t$, $y=a\operatorname{sen} t$. *Respuesta*: 0.

2. $\int y\,dx-x\,dy$ a lo largo del arco del elipse $x=a\cos t$, $y=b\operatorname{sen} t$. *Respuesta*: $-2\pi ab$.

3. $\int \frac{x}{x^2+y^2}\,dx-\frac{y}{x^2+y^2}\,dy$ a lo largo de la circunferencia con el centro en el origen de coordenadas. *Respuesta*: 0.

4. $\int \frac{y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}$ a lo largo de un segmento de la recta $y=x$, desde $x=1$ hasta $x=2$. *Respuesta*: $\ln 2$.

5. $\int yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$ a lo largo del hélice $x=a\cos t$, $y=a\operatorname{sen} t$, $z=kt$, cuando $t$ varía desde 0 hasta $2\pi$. *Respuesta*: 0.

6. $\int x\,dy-y\,dx$ a lo largo del arco de hipocicloide $x=a\cos^3 t$, $y=a\operatorname{sen}^3 t$. *Respuesta*: $\frac{3}{4}\pi a^2$ (área duplicada de la hipocicloide).

7. $\int x\,dy-y\,dx$ a lo largo del lazo del folio de Descartes $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$. *Respuesta*: $\frac{3}{2}a^2$ (área duplicada del dominio limitado por este lazo).

8. $\int x\,dy-y\,dx$ a lo largo de la curva $x=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$. *Respuesta*: $-6\pi a^2$ (área duplicada del dominio limitado por un arco de la cicloide y el eje $Ox$).

Demostrar que:

9. $\operatorname{grad}(c\varphi)=c\operatorname{grad}\varphi$, donde $c$ es constante.

10. $\operatorname{grad}(c_1\varphi+c_2\psi)=c_1\operatorname{grad}\varphi+c_2\operatorname{grad}\psi$, donde $c$ es constante.

11. $\operatorname{grad}(\varphi\psi)=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi$.

12. Hallar $\operatorname{grad} r$, $\operatorname{grad} r^2$, $\operatorname{grad}\frac{1}{r}$, $\operatorname{grad} f(r)$, donde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

*Respuesta*: $\frac{\boldsymbol{r}}{r}$; $2\boldsymbol{r}$; $-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$; $f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$.

13. Demostrar que $\operatorname{div}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\operatorname{div}\boldsymbol{A}+\operatorname{div}\boldsymbol{B}$.

14. Calcular $\operatorname{div}\boldsymbol{r}$, donde $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. *Respuesta*: 3.

15. Calcular $\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\varphi)$, donde $\boldsymbol{A}$ es una función vectorial, y $\varphi$ s una función escalar. *Respuesta*: $\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{A}+(\operatorname{grad}\varphi\boldsymbol{A})$.

**16.** Calcular div $(\boldsymbol{r}.\boldsymbol{c}.)$, donde $c$ es un vector constante. *Respuesta*: $\frac{(cr)}{r}$.

**17.** Calcular div $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{A})$. *Respuesta* $\boldsymbol{AB}$.

Demostrar que:

**18.** $\text{rot}\,(c_1 A_1 + c_2 A_2) = c_1 \,\text{rot}\, A_1 + c_2 \,\text{rot}\, A_2$, donde $c_1$ y $c_2$ son constantes.

**19.** $\text{rot}\,(Ac) = \text{grad}\, A \times c$, donde $c$ es un vector constante.

**20.** $\text{rot rot}\, A = \text{grad div}\, A - \Delta A$.

**21.** $A \times \text{grad}\, \varphi = \text{rot}\,(\varphi A)$.

**Integrales de superficie**

**22.** Demostrar que $\iint \cos(nz)\, d\sigma = 0$, si $\sigma$ es una superficie cerrada y $n$ es su normal.

**23.** Hallar el momento de inercia, respecto al eje $Oz$, de la superficie de un segmento de la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=R^2$ separado por el plano $z=H$. *Respuesta*: $\frac{2\pi R}{3}(2R^3-3R^2H+H^3)$.

**24.** Hallar el momento de inercia, respecto al eje $Oz$, de una parte de la superficie del paraboloide de revolución $x^2+y^2=2cz$, separada por el plano $z=c$. *Respuesta*: $\frac{16}{3}c^5$.

**25.** Calcular las coordenadas del centro de gravedad de una parte de la superficie del cono $x^2+y^2=\frac{R^2}{H^2}z^2$, separada por el plano $z=H$. *Respuesta*: $0;\ 0;\ \frac{2}{3}H$.

**26.** Calcular las coordenadas del centro de gravedad de un segmento de la superficie de la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$, separado por el plano $z=H$. *Respuesta*: $\left(0,\ 0,\ \frac{R+H}{2}\right)$.

**27.** Hallar $\iint\limits_{\sigma} [x\cos(nx)+y\cos(ny)+z\cos(nz)]\, d\sigma$, donde $\sigma$ es una superficie cerrada. *Respuesta*: $3\,V$, donde $V$ es el volumen del cuerpo limitado por $\sigma$.

**28.** Hallar $\iint\limits_{S} z\, dx\, dy$, donde $S$ es la superficie exterior de la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$. *Respuesta*: $\frac{4}{3}\pi R^3$.

**29.** Hallar $\iint\limits_{S} x^2\, dy\, dz + y^2\, dz\, dx + z^2\, dx\, dy$, donde $S$ es la superficie exterior de la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$. *Respuesta*: $\pi R^4$.

**30.** Hallar $\iint\limits_{S} \sqrt{x^2+y^2}\, ds$, donde $S$ es la superficie lateral del cono $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0$, $0 \leqslant z \leqslant b$. *Respuesta*: $\frac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}$.

**31.** Transformar, según la fórmula de Stokes, la integral $\int\limits_{L} y\, dx + z\, dy + x\, dz$.

*Respuesta*: $-\iint\limits_{S} (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\, ds$.

Hallar las integrales curvilíneas directamente y con ayuda de la fórmula de Stokes:

32. $\int\limits_L (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$, donde $L$ es una circunferencia $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$. *Respuesta*: 0.

33. $\int\limits_L x^2y^3\,dx+dy+z\,dz$, donde $L$ es una circunferencia $x^2+y^2=R^2$, $z=0$. *Respuesta*: $-\frac{\pi R^6}{8}$.

Utilizando la fórmula de Ostrogradski, transformar las integrales de superficie en las de volumen:

34. $\iint\limits_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,ds$. *Respuesta*: $\iiint\limits_V 3dx\,dy\,dz$.

35. $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)(dy\,dz+dx\,dz+dx\,dy)$. *Respuesta*:

$$2\iiint\limits_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz.$$

36. $\iint\limits_S xy\,dx\,dy+yz\,dy\,dz+zx\,dz\,dx$. *Respuesta*: 0.

37. $\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\,dz+\frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dz+\frac{\partial u}{\partial z}\,dx\,dy$. *Respuesta*:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz.$$

Usando la fórmula de Ostrogradski, calcular las siguientes integrales:

38. $\iint\limits_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,ds$, donde $S$ es la superficie de un elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. *Respuesta*: $4\pi abc$.

39. $\iint\limits_S (x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)\,ds$, donde $S$ es la superficie de una esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$. *Respuesta*: $\frac{12}{5}\pi R^5$.

40. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, donde $S$ es la superficie de un cono $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ $(0\leqslant z\leqslant b)$. *Respuesta*: $\frac{\pi a^2b^2}{2}$.

41. $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy$, donde $S$ es la superficie de un cilindro $x^2+y^2=a^2$, $-H\leqslant z\leqslant H$. *Respuesta*: $3\pi a^2H$.

42. Demostrar la identidad $\iint\limits_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dx\,dy=\int\limits_C \frac{\partial u}{\partial n}\,ds$, donde $C$ es un contorno que limita el dominio $D$, y $\frac{\partial u}{\partial n}$, una derivada siguiendo la normal exterior.

**Solución.**

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dx\,dy=\int\limits_C -Y\,dx+X\,dy=\int\limits_C [-Y\cos(s,\,x)+X\,\mathrm{sen}\,(s,\,x)]\,ds,$$

donde $(s,\,x)$ es el ángulo formado por la tangente al contorno $C$ y el eje $Ox$. Si designamos por $(n,\,x)$ el ángulo formado por la normal y el eje $Ox$,

entonces $\operatorname{sen}(s, x) = \cos(n, x)$, $\cos(s, x) = -\operatorname{sen}(n, x)$. Por consiguiente, $\iint\limits_D \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_C [X \cos(n, x) + Y \operatorname{sen}(n, x)]\, ds$. Poniendo $X = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial u}{\partial y}$, obtenemos:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\, dy = \int\limits_C \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \operatorname{sen}(n, x)\right) ds$$

ó

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\, dy = \int\limits_C \frac{\partial u}{\partial n}\, ds.$$

La expresión $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ se llama *operador de Laplace*.

43. Demostrar la identidad (así llamada *fórmula de Green*)

$$\iiint\limits_V (v\Delta u - u\Delta v)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_\sigma \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma,$$

donde $u$ y $v$ son funciones continuas que tienen derivadas continuas hasta el segundo orden en el dominio $D$.

Los símbolos $\Delta u$ y $\Delta v$ significan:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Estas expresiones se llaman *operadores de Laplace* en el espacio.

**Solución.** En la fórmula

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \iint\limits_\sigma [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z)]\, d\sigma$$

pongamos que

$$X = vu'_x - uv'_x,$$
$$Y = vu'_y - uv'_y,$$
$$Z = vu'_z - uv'_z.$$

Entonces

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = v(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}) - u(v''_{xx} + v''_{yy} + v''_{zz}) = v\Delta u - u\Delta v,$$

$$X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z) =$$
$$= v(u'_x \cos nx + u'_y \cos ny + u'_z \cos nz) - u(v'_x \cos nx + v'_y \cos ny + v'_z \cos nz) =$$
$$= v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}.$$

Por tanto,

$$\iiint\limits_V (v\Delta u - u\Delta v)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_\sigma \left(v \frac{\partial u}{\partial u} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma.$$

44. Demostrar la identidad

$$\iiint\limits_V \Delta u\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_\sigma \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma,$$

donde $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ (operador de Laplace).

**Solución.** En la fórmula de Green deducida en el ejemplo anterior pongamos $v = 1$. Entonces $\Delta v = 0$ y obtenemos la identidad mencionada.

45. Si $u(x, y, z)$ es una función armónica en cierto dominio, es decir, una función tal que en cualquier punto de este dominio satisface a la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

entonces

$$\iint\limits_\sigma \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = 0,$$

donde $\sigma$ es una superficie cerrada.

**Solución.** Se infiere directamente de la fórmula dada en el problema 44.

46. Sea $u(x, y, z)$ una función armónica en cierto dominio $V$ y supongamos que en el dominio $V$ se encuentra una esfera $\overline{\sigma}$ con el centro en el punto $M(x_1, y_1, z_1)$ y el radio $R$. Demostrar que

$$u(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\overline{\sigma}} u\, d\sigma.$$

**Solución.** Examinemos el dominio $\Omega$ limitado por dos esferas $\underline{\sigma}$, $\overline{\sigma}$ de radios $R$ y $\rho$ ($\rho < R$) con centros en el punto $M(x_1, y_1, z_1)$. Apliquemos a este dominio la fórmula de Green deducida en el problema 43, designando con $u$ la función arriba indicada y con $v$, la función

$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}.$$

Realizando la derivación directa y sustitución nos convencemos que $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$. Por consiguiente,

$$\iint\limits_{\underline{\sigma}+\overline{\sigma}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) d\sigma = 0,$$

$$\iint\limits_{\underline{\sigma}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} \right) d\sigma + \iint\limits_{\overline{\sigma}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} \right) d\sigma = 0.$$

En las superficies $\overline{\sigma}$ y $\underline{\sigma}$ la magnitud $\frac{1}{r}$ es constante $\left(\frac{1}{R} \text{ y } \frac{1}{\rho}\right)$ y por eso puede ser sacada fuera del signo de la integral. En virtud de la respuesta

obtenida en el problema 45, tenemos:

$$\frac{1}{R}\iint_{\underline{\sigma}} \frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma=0; \quad \frac{1}{\rho}\iint_{\bar{\sigma}} \frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma=0.$$

Por tanto,

$$-\iint_{\underline{\sigma}} u\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\,d\sigma+\iint_{\bar{\sigma}} u\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\,d\sigma=0,$$

pero,

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}=-\frac{1}{r^2}.$$

Por eso

$$+\iint_{\underline{\sigma}} u\,\frac{1}{r^2}\,d\sigma-\iint_{\bar{\sigma}} u\,\frac{1}{r^2}\,d\sigma=0$$

ó

$$\frac{1}{\rho^2}\iint_{\underline{\sigma}} u\,d\sigma=\frac{1}{R^2}\iint_{\bar{\sigma}} u\,d\sigma. \tag{1}$$

Apliquemos el teorema de la media a la integral del segundo miembro:

$$\frac{1}{\rho^2}\iint_{\underline{\sigma}} u\,d\sigma=\frac{u(\xi,\ \eta,\ \zeta)}{\rho^2}\iint_{\bar{\sigma}} d\sigma, \tag{2}$$

donde $u(\xi, \eta, \zeta)$ es el punto sobre la superficie de una esfera de radio $\rho$ y centro en el punto $M(x_1, y_1, z_1)$.

Hagamos que $\rho$ tienda a cero; entonces $u(\xi, \eta, \zeta)\to u(x_1, y_1, z_1)$:

$$\frac{1}{\rho^2}\iint_{\bar{\sigma}} d\sigma=\frac{4\pi\rho^2}{\rho^2}=4\pi.$$

Por consiguiente, cuando $\rho\to 0$, obtenemos:

$$\frac{1}{\rho^2}\iint_{\bar{\sigma}} u\,d\sigma\to u(x_1,\ y_1,\ z_1)\,4\pi.$$

Luego, puesto que el primer miembro de la igualdad (1) no depende de $\rho$, entonces para $\rho\to 0$, obtenemos definitivamente:

$$\frac{1}{R^2}\iint_{\bar{\sigma}} u\,d\sigma=4\pi u(x_1,\ y_1,\ z_1)$$

ó

$$u(x_1,\ y_1,\ z_1)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\bar{\sigma}} u\,d\sigma.$$

CAPITULO XVI

# SERIES

## § 1. SERIE. SUMA DE UNA SERIE

**Definición 1.** Sea dada una sucesión infinita de números *)

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

La expresión

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

se llama *serie númerica*. Los números $u_1$, $u_2$, ... $u_n$, ... se llaman *términos de la serie.*

**Definición 2.** La suma del número finito de los $n$ primeros términos de la serie se llama $n$ — *ésima suma parcial de la serie*:

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Examinemos las sumas parciales:

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1, \\ s_2 &= u_1 + u_2, \\ s_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n. \end{aligned}$$

Si existe un límite finito

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

entonces, éste se llama *suma de la serie* (1) y se dice que la *serie converge.*

Si $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ no existe (por ejemplo, $s_n \to \infty$ para $n \to \infty$), entonces se dice que *la serie* (1) *diverge y no tiene suma.*

**Ejemplo.** Examinemos la serie

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \qquad (2)$$

*) Una sucesión se considera dada, cuando se conoce la ley que permite calcular cualquier su término $u_n$ para $n$ dado.

Es una progresión geométrica con primer término $a$ y razón $q$ $(a \neq 0)$.

La suma de los $n$ primeros términos de la progresión geométrica (para $q \neq 1$) es igual a:

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1-q}$$

ó

$$s_n = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

1) Si $|q| < 1$, entonces $q^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y, por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}.$$

Esto significa, que si $|q| < 1$, la serie (2) converge y su suma es

$$s = \frac{a}{1-q}.$$

2) Si $|q| > 1$, entonces $|q^n| \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y, por tanto, $\frac{a - aq^n}{1-q} \to \pm\infty$, cuando $n \to \infty$, es decir, $\lim_{n\to\infty} s_n$ no existe. De este modo, cuando $|q| > 1$, la serie (2) diverge.

3) Si $q = 1$, la serie (2) tiene la forma

$$a + a + a + \ldots$$

En este caso $s_n = na$, $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, es decir, la serie diverge.

4) Si $q = -1$, la serie (2) toma la forma

$$a - a + a - a + \ldots$$

En este caso

$$s_n = \begin{cases} 0, & \text{cuando } n \text{ es par} \\ a, & \text{cuando } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por consiguiente, $s_n$ no tiene límite, la serie diverge.

De este modo, la progresión geométrica (con el primer término diferente de cero) converge solamente cuando el valor absoluto de la razón de la progresión es menor que 1.

**Teorema 1.** *Si converge la serie, obtenida mediante la supresión en* (1) *de algunos de sus términos, entonces converge también la serie dada. Inversamente, si converge la serie dada, entonces converge también la serie obtenida mediante la supresión de algunos de sus términos. En otras palabras, en la convergencia de la serie no influye la supresión de un número finito de sus términos.*

**Demostración.** Sean $s_n$ la suma de los $n$ primeros términos de la serie (1); $c_k$, la suma de los $k$ términos suprimidos (notemos, que cuando $n$ es suficientemente grande, todos los términos suprimidos se contienen en la suma $s_n$); $\sigma_{n-k}$, la suma de los términos de la serie que entran en la suma $s_n$, pero no entran en la $c_k$. Entonces tenemos:

$$s_n = c_k + \sigma_{n-k},$$

donde $c_k$ es un número constante que no depende de $n$.

De la última relación se deduce que si existe $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n-k}$, entonces existe también $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$; si existe $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, entonces existe también $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n-k}$ y queda así demostrado el teorema.

Concluyendo el párrafo, indiquemos dos propiedades elementales de las series.

**Teorema 2.** *Si la serie*

$$a_1 + a_2 + \ldots \tag{3}$$

*converge y su suma es igual a s, entonces la serie*

$$ca_1 + ca_2 + \ldots, \tag{4}$$

*donde c es un número arbitrario fijo, también converge y su suma es igual a cs.*

**Demostración.** Designemos por $s_n$ la $n$ — ésima suma parcial de la serie (3) y por $\sigma_n$, la suma parcial de la serie (4).

Entonces:

$$\sigma_n = ca_1 + \ldots + ca_n = c(a_1 + \ldots + a_n) = cs_n.$$

De aquí es evidente que el límite de la $n$-ésima suma parcial de la serie (4) existe, puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (cs_n) = c \lim_{n\to\infty} s_n = cs.$$

Por tanto, la serie (4) converge y su suma es igual a $cs$.

**Teorema 3.** *Si las series*

$$a_1 + a_2 + \ldots \tag{5}$$

y

$$b_1 + b_2 + \ldots \tag{6}$$

*convergen y sus sumas son iguales a* $\bar{s}$ *y* $\bar{\bar{s}}$, *respectivamente, entonces las series*

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots \tag{7}$$

y

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots \tag{8}$$

*también convergen, y sus sumas son iguales a* $\bar{s} + \bar{\bar{s}}$ *y* $\bar{s} - \bar{\bar{s}}$, *respectivamente.*

**Demostración.** Demostremos la convergencia de la serie (7). Designemos su $n$-ésima suma parcial por $\sigma_n$, y las $n$-ésimas sumas parciales de las series (5) y (6) por $\bar{s}_n$ y $\bar{\bar{s}}_n$, respectivamente, y obte-

nemos:

$$\sigma_n = (a_1 + b_1) + \ldots + (a_n + b_n) =$$

$$= (a_1 + \ldots + a_n) + (b_1 + \ldots + b_n) = \bar{s}_n + \bar{\bar{s}}_n.$$

Pasando en esta igualdad al límite, cuando $n \to \infty$, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (\bar{s}_n + \bar{\bar{s}}_n) = \lim_{n\to\infty} \bar{s}_n + \lim_{n\to\infty} \bar{\bar{s}}_n = \bar{s} + \bar{\bar{s}}.$$

De este modo, la serie (7) converge y su suma es igual a $\bar{s} + \bar{\bar{s}}$.

De una manera semejante se demuestra que la serie (8) también converge y su suma es igual a $\bar{s} - \bar{\bar{s}}$.

Se dice que las series (7) y (8) son obtenidas mediante la adición o la sustracción, respectivamente, término a término, de las series (5) y (6).

## § 2. CONDICION NECESARIA DE CONVERGENCIA DE UNA SERIE

En el estudio de las series, uno de los problemas principales es el de la convergencia o de la divergencia de la serie dada. A continuación establezcamos los criterios suficientes, a base de los cuales se puede resolver este problema. Ahora examinemos un criterio necesario para la convergencia de una serie, es decir, establezcamos la condición, cuyo incumplimiento significa que la serie diverge.

**Teorema.** *Si una serie converge, entonces su n-ésimo término tiende a cero, cuando n crece indefinidamente.*

**Demostración.** Sea la serie $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ convergente, es decir, tiene lugar la igualdad $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, donde $s$ es la suma de la serie (o sea, un número finito fijo), pero entonces tenemos la igualdad $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s$, puesto que cuando $n \to \infty$, también $(n-1) \to \infty$. Sustrayendo término a término la segunda igualdad de la primera, obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0$$

ó

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = 0.$$

Pero,

$$s_n - s_{n-1} = u_n.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

lo que se trataba de demostrar.

**Corolario.** *Si el n-ésimo término de la serie no tiende a cero, cuando $n \to \infty$, la serie diverge.*

**Ejemplo.** La serie

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\ldots+\frac{n}{2n+1}+\ldots$$

diverge, puesto que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Subrayemos que el criterio analizado es sólo indispensable, pero no es suficiente, es decir, de lo que *n-ésimo término tiende a cero no se deduce obligatoriamente que la serie converge (la serie puede ser también divergente).*

Por ejemplo, la llamada *serie armónica* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ $\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ diverge, aunque $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

Para demostrarlo, escribamos más detalladamente la serie armónica:

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+$$
$$+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}}+\ \ldots \qquad (1)$$

Escribimos, luego, una serie auxiliar:

$$1+\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\overbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+$$
$$+\overbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}+\overbrace{\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{32}}^{16\ \text{sumandos}}+\ldots \qquad (2)$$

La serie (2) se forma de modo siguiente: su primer término es igual a 1; el segundo, a 1/2; el tercer y cuarto son iguales a 1/4; los términos a partir del quinto hasta el octavo son iguales a 1/8; los términos desde el noveno hasta el 16 son iguales a 1/16; los términos desde el 17 hasta el 32 son iguales a 1/32, etc.

Designemos por $s_n^{(1)}$ la suma de los $n$ primeros términos de la serie armónica (1) y por $s_n^{(2)}$, la suma de los $n$ primeros términos de la serie (2).

Puesto que cada término de la serie (1) es mayor que el correspondiente término de la serie (2) o es igual a éste, entonces, para $n > 2$, tenemos

$$s_n^{(1)} > s_n^{(2)}. \tag{3}$$

Calculemos las sumas parciales de la serie (2) para los valores de $n$, iguales a $2^1$, $2^2$, $2^3$, $2^4$, $2^5$:

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1 + 1\cdot\frac{1}{2},$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2\cdot\frac{1}{2},$$

$$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + 3\cdot\frac{1}{2},$$

$$s_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ sumandos}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ sumandos}} = 1 + 4\cdot\frac{1}{2},$$

$$s_{32} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ sumandos}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ sumandos}} + \underbrace{\left(\frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{32}\right)}_{16 \text{ sumandos}} = 1 + 5\cdot\frac{1}{2};$$

del mismo modo se calcula que $s_{2^6} = 1 + 6\cdot 1/2$, $s_{2^7} = 1 + 7\cdot 1/2$, y, en general, $s_{2^k} = 1 + k\cdot 1/2$.

Por consiguiente, las sumas parciales de la serie (2), para $k$ suficientemente grande, pueden ser mayores que cualquier número positivo, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} s_n^{(2)} = \infty,$$

pero, entonces, de la relación (3) se deduce que también

$$\lim_{n\to\infty} s_n^{(1)} = \infty,$$

es decir, la serie armónica (1) diverge.

## § 3. COMPARACION DE LAS SERIES CON TERMINOS POSITIVOS

Sean dos series con términos positivos:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{1}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots \tag{2}$$

Para éstas son válidas las siguientes **afirmaciones.**

**Teorema 1.** *Si los términos de la serie* (1) *no son mayores que los términos correspondientes de la serie* (2), *es decir,*

$$u_n \leqslant v_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

*y la serie* (2) *converge, entonces la serie* (1) *también converge.*

**Demostración.** Designemos por $s_n$ y $\sigma_n$, respectivamente, las sumas parciales de las series primera y segunda:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i, \qquad \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} v_i.$$

De la condición (3) se deduce que

$$s_n \leqslant \sigma_n. \tag{4}$$

Puesto que la serie (2) converge, entonces existe el limite $\sigma$ de su suma parcial

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma.$$

Puesto que los términos de las series (1) y (2) son positivos, tenemos $\sigma_n < \sigma$; entonces, en virtud de la desigualdad (4)

$$s_n < \sigma.$$

Así, hemos demostrado que las sumas parciales $s_n$ están limitadas. Notemos que cuando $n$ crece, la suma parcial $s_n$ también crece; al mismo tiempo, del hecho de que la sucesión de las sumas parciales está limitada y crece se deduce que ésta tiene un límite *)

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

y es evidente que

$$s \leqslant \sigma.$$

Basándose en el teorema 1, se puede juzgar sobre la convergencia de algunas series.

**Ejemplo 1.** La serie

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$$

---

*) Para convencerse de que la variable $s_n$ tiene un límite, recordemos un criterio de existencia del límite de una sucesión (véase § 5, cap. II, tomo I): «si la variable es creciente y acotada, entonces ella tiene un límite». En el caso dado, la sucesión de las sumas $s_n$ está limitada y crece, por consiguiente, ella tiene un límite, es decir, la serie converge.

converge, puesto que sus términos son menores que los términos correspondientes de la serie

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Pero, la última serie converge puesto que sus términos, a partir del segundo, forman una progresión geométrica de razón $^1/_2$. La suma de esta serie es igual a $1\frac{1}{2}$. Por consiguiente, en virtud del teorema 1, la serie dada también converge y su suma no supera a $1\frac{1}{2}$.

**Teorema 2.** *Si los términos de la serie (1) no son menores que los términos respectivos de la serie (2), es decir*

$$u_n \geqslant v_n, \tag{5}$$

*y la serie (2) diverge, entonces la serie (1) también diverge.*

**Demostración.** De la condición (5) se deduce que

$$s_n \geqslant \sigma_n. \tag{6}$$

Como los términos de la serie (2) son positivos, entonces su suma parcial $\sigma_n$ crece, al aumentar $n$, y como la serie diverge, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty.$$

Pero, en virtud de la desigualdad (6)

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty,$$

es decir, la serie (1) diverge.

**Ejemplo 2.** La serie

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

diverge puesto que sus términos (a partir del segundo) son mayores que los términos correspondientes de la serie armónica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

la cual, como es sabido, diverge.

**Observación:** Los dos criterios demostrados (teoremas 1 y 2) son válidos solamente para las series con términos positivos. Ellos quedan en vigor también para el caso, en que algunos términos de la primera o segunda serie son iguales a cero. Sin embargo, estos criterios dejan de ser válidos, si entre los términos de la serie hay números negativos.

## § 4. CRITERIO DE D'ALEMBERT

**Teorema (Criterio de d'Alembert).** *Si en una serie con términos positivos*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

*la relación de $(n+1)$-ésimo término respecto al n-ésimo cuando*

$n \to \infty$, *tiene un límite (finito)* $l$, *o sea,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, \tag{2}$$

entonces:

1) *la serie converge cuando* $l < 1$,

2) *la serie diverge cuando* $l > 1$.

(Cuando $l = 1$, el teorema no da la respuesta sobre la convergencia o divergencia de la serie).

**Demostración.** 1) Sea $l < 1$. Examinemos el número $q$ que satisface a la correlación $l < q < 1$ (fig. 342).

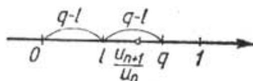



*Fig. 342*

De la definición del límite y de la relación (2) se deduce que para todos los valores $n$, a partir de cierto número $N$, o sea, para $n \geqslant N$, tiene lugar la desigualdad

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q. \tag{2'}$$

En efecto, como la magnitud $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tiende al límite $l$, la diferencia entre la magnitud $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ y el número $l$ (a partir de cierto número $N$) se puede hacer menor, en valor absoluto, que cualquier número positivo, en particular, menor que $q - l$, es decir,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < q - l.$$

De la última desigualdad se deduce la desigualdad (2'). Escribiendo esta desigualdad para diferentes valores de $n$, a partir del número $N$, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} u_{N+1} < qu_N, \\ u_{N+2} < qu_{N+1} < q^2 u_N, \\ u_{N+3} < qu_{N+2} < q^3 u_N, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{3}$$

Examinemos ahora dos series:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \ldots, \tag{1}$$

$$u_N + qu_N + q^2 u_N + \ldots \tag{1'}$$

La serie (1') es una progresión geométrica con razón positiva $q < 1$. Por consiguiente, esta serie converge. Los términos de la serie (1), a partir de $u_{N+1}$, son menores que los términos de la serie (1'). Según el teorema 1, § 3 y el teorema 1, § 1, deducimos que la serie (1) converge.

2) Sea $l > 1$.

Entonces, de la igualdad $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ (donde $l > 1$) se deduce que a partir de cierto numero $N$, o sea, para $n \geqslant N$, tiene lugar

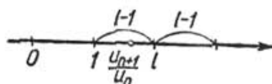



*Fig. 343*

la desigualdad $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ (fig. 343), ó $u_{n+1} > u_n$ para todos los $n \geqslant N$. Pero esto significa que los términos de la serie crecen, a partir del número $N+1$, y, por eso, el término común de la serie no tiende a cero. Por consiguiente, la serie diverge.

**Observación 1.** La serie divergirá también, cuando $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$. Esto se deduce de que si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$, entonces, a partir de cierto número $n = N$, tendrá lugar la desigualdad $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, ó $u_{n+1} > u_n$.

**Ejemplo 1.** Estudiar la convergencia de la serie

$$1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots \cdot n} + \ldots$$

**Solución.** Aquí tenemos:

$$u_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} = \frac{1}{n!}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n\,(n+1)} = \frac{1}{(n+1)!};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

La serie converge.

**Ejemplo 2.** Estudiar la convergencia de la serie

$$\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \ldots + \frac{2^n}{n} + \ldots$$

**Solución.** Aquí tenemos: $u_n=\frac{2^n}{n}$; $u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{n+1}$; $\frac{u_{n+1}}{u_n}=2\,\frac{n}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}2\,\frac{n}{n+1}=2>1$.

La serie diverge y su término común $u_n$ tiende al infinito.

**Observación 2.** El criterio de d'Alembert da la respuesta de que una serie positiva dada converge o no, sólo en el caso en que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe y difiere de 1. Si este límite no existe o existe, pero $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ es igual a 1, entonces el criterio de d'Alembert no permite establecer que la serie converge o diverge, puesto que, en este caso, la serie puede resultar tanto convergente, como divergente. Para solucionar el problema sobre la convergencia de semejantes series es preciso aplicar otro criterio.

Notemos, sin embargo, que si $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ y la razón $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ para todos los números $n$, a partir de cierto número, es mayor que 1, la serie diverge. En efecto, si $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, entonces $u_{n+1}>u_n$ y el término común no tiende a cero, cuando $n\to\infty$.

Estudiemos los ejemplos que ilustran lo enunciado más arriba.

**Ejemplo 3.** Analizar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots$$

**Solución.** Aquí $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=1$. En el caso dado la serie diverge, puesto que $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ para todos los $n$: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}>1$.

**Ejemplo 4.** Aplicando el criterio de d'Alembert para la serie armónica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

notemos que $u_n=\frac{1}{n}$, $u_{n+1}=\frac{1}{n+1}$, y, por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

Así, basándose en el criterio de d'Alembert, no podemos determinar, si la serie dada converge o diverge. Pero antes hemos definido por otro procedimiento, que la serie armónica diverge.

**Ejemplo 5.** Analizar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

**Solución.** Aquí,

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)},\ u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1.$$

Basándose en el criterio de d'Alembert no podemos determinar nada respecto a la convergencia de esta serie, pero, partiendo de otras consideraciones, se puede definir que la serie converge. Al notar que

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

podemos escribir la serie dada en la forma siguiente:

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots$$

Después de abrir los paréntesis y hacer la reducción, la suma parcial de los $n$ primeros términos será igual a

$$s_n=1-\frac{1}{n+1}.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

es decir, la serie converge y su suma es igual a 1.

## § 5. CRITERIO DE CAUCHY

**Teorema (Criterio de Cauchy).** *Si para la serie con términos positivos*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

*la magnitud* $\sqrt[n]{u_n}$ *tiene un límite finito* $l$ *cuando* $n\to\infty$, *es decir,*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l,$$

*entonces:*

1) *si* $l<1$, *la serie converge;*
2) *si* $l>1$, *la serie diverge.*

**Demostración.** 1) Sea $l < 1$. Examinemos el número $q$ que satisface a la desigualdad $l < q < 1$.

A partir de cierto número $n = N$, tiene lugar la relación

$$|\sqrt[n]{u_n} - l| < q - l;$$

de donde se deduce que

$$\sqrt[n]{u_n} < q$$

ó

$$u_n < q^n$$

para todos los $n \geqslant N$.

Ahora examinemos dos series:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \ldots, \quad (1)$$

$$q^N + q^{N+1} + q^{N+2} + \ldots \quad (1')$$

La serie (1′) converge puesto que sus términos forman una progresión geométrica decreciente. Los términos de la serie (1), a partir de $u_N$, son menores que los términos respectivos de la serie (1′). Por consiguiente, la serie (1) converge.

2) Sea $l > 1$. Entonces, a partir de cierto número $n = N$, tenemos:

$$\sqrt[n]{u_n} > 1$$

ó

$$u_n > 1.$$

Pero, si todos los términos de la serie examinada, a partir de $u_N$, son mayores que 1, la serie diverge, puesto que su término común no tiende a cero.

**Ejemplo.** Estudiar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \ldots$$

**Solución.** Apliquemos el criterio de Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

La serie converge.

**Observación.** Igual que en el criterio de d'Alembert, el caso de

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l = 1$$

exige un estudio adicional. Entre las series que satisfacen a esta condición, pueden encontrarse tanto convergentes, como divergentes. Así, para la serie armónica (que, como es sabido, diverge) tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Para asegurarse de esto, demostremos que $\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 0$. Efectivamente,

$$\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln n}{n}.$$

Aquí el numerador y el denominador de la fracción tienden al infinito. Aplicando la regla de l'Hospital, hallamos:

$$\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n}}{1} = 0.$$

Pues, $\ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 0$, pero entonces: $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Para la serie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

también tiene lugar la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1;$$

pero esta serie converge, puesto que, si suprimimos el primer término, los términos de la serie obtenida serán menores que los correspondientes términos de la serie convergente

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

(véase el ejemplo 5, § 4).

## § 6. CRITERIO INTEGRAL DE CONVERGENCIA DE LA SERIE

**Teorema.** *Sean los términos de la serie*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

*positivos y no crecientes, es decir,*

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant \ldots,$$

*y sea $f(x)$ una función continua no creciente tal que*

$$f(1) = u_1; \quad f(2) = u_2; \ \ldots; \ f(n) = u_n. \qquad (2)$$

*En este caso son válidas las siguientes afirmaciones:*

1) *si la integral impropia*

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

*converge* (véase § 7, capítulo XI, tomo I), *es convergente también la serie* (1):

2) *si esta integral diverge, es divergente también la serie* (1).

**Demostración.** Representemos los términos de la serie geométricamente, marcando en el eje de abscisas los números de los térmi-

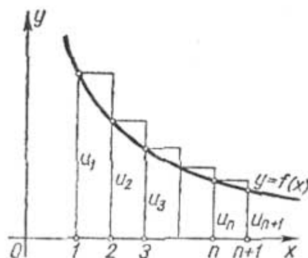



*Fig. 344*

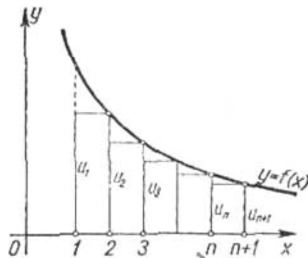



*Fig. 345*

nos de la serie 1, 2, 3 ... $n$, $n+1$, ..., y en el eje de ordenadas, los valores correspondientes de los términos de la serie $u_1$, $u_2$, ... ... $u_n$, ..., (fig. 344).

Tracemos en la misma figura la gráfica de la función continua no creciente

$$y = f(x),$$

que satisface a la condición (2).

Examinando la figura 344, notamos que el primer de los rectángulos construidos tiene la base igual a 1, y la altura $f(1) = u_1$. Por consiguiente, el área de este rectángulo es $u_1$. El área del segundo

rectángulo es $u_2$, etc.; por fin, el área del último ($n$-ésimo) de los rectángulos construidos es $u_n$. La suma de las áreas de los rectángulos construidos es igual a la suma $s_n$ de los $n$ primeros términos de la serie. Por otra parte, la figura escalonada formada por estos rectángulos comprende un dominio limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = 1$, $x = n + 1$, $y = 0$; el área de este dominio es igual a $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$. Por consiguiente

$$s_n > \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Analicemos ahora la figura 345. Aquí, el primer (izquierdo) de los rectángulos construidos tiene la altura $u_2$; por tanto, su área es también $u_2$. El área del segundo rectángulo es $u_3$, etc. El área del último de los rectángulos construidos es $u_{n+1}$. Por consiguiente, la suma de las áreas de todos los rectángulos construidos es igual a la suma de todos los términos de la serie, a partir del segundo hasta el $(n + 1)$ — ésimo, es decir, es igual a $s_{n+1} - u_1$. Por otra parte, como es fácil ver, la figura escalonada formada por estos rectángulos, está comprendida en el interior de la figura curvilínea limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = 1$, $x = n + 1$, $y = 0$. El área de esta figura curvilínea es igual a $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$. Por consiguiente,

$$s_{n+1} - u_1 < \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx,$$

de donde

$$s_{n+1} < \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx + u_1. \tag{4}$$

Ahora analicemos ambos casos.

1. Supongamos que la integral $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge, es decir, tiene un valor finito.

Puesto que

$$\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx < \int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx,$$

entonces, en virtud de la desigualdad (4) tenemos:

$$s_n < s_{n+1} < \int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx + u_1,$$

es decir, la suma parcial $s_n$ queda limitada para todos los valores de $n$. Pero, al aumentar $n$, ésta crece, puesto que todos los términos $u_n$ son positivos. Por consiguiente, cuando $n \to \infty$, $s_n$ tiene un límite finito:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

es decir, la serie converge.

2. Supongamos, también, que $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx = \infty$. Esto significa que $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$ crece indefinidamente al aumentar $n$. Pero entonces, en virtud de la desigualdad (3), $s_n$ también crece indefinidamente al aumentar $n$, es decir, la serie diverge.

De este modo, el teorema queda completamente demostrado.

**Ejemplo.** Analizar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

**Solución.** Apliquemos el criterio integral, poniendo $f(x)=\frac{1}{x^p}$. Esta función satisface a todas las condiciones del teorema. Analicemos la integral

$$\int\limits_1^N \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p}\,x^{1-p}\Big|_1^N = \frac{1}{1-p}\,(N^{1-p}-1) & \text{para } p \neq 1, \\ \ln x\Big|_1^N = \ln N & \text{para } p=1. \end{cases}$$

Hagamos que $N$ tienda al infinito y estudiemos la convergencia de la integral impropia en diferentes casos. Partiendo de esto, podemos juzgar de la convergencia o divergencia de la serie para diferentes valores de $p$.

Si $p>1$, $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$, es decir, la integral es finita y, por consiguiente, la serie converge; si $p<1$, $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}=\infty$, la integral es infinita, la serie diverge; si $p=1$, $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x}=\infty$, la integral es infinita, la serie diverge.

Señalemos que ni el criterio de d'Alembert, ni el de Cauchy, examinados más arriba, resuelven la cuestión respecto a la convergencia de esta serie, puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^p = 1^p = 1.$$

## § 7. SERIES ALTERNANTES. TEOREMA DE LEIBNIZ

Hasta ahora hemos estudiado las series cuyos términos son positivos. En el párrafo presente examinemos las series cuyos términos son alternativamente positivos y negativos, es decir, las series de la forma

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots,$$

donde $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ son positivos.

**Teorema de Leibniz.** *Si una serie alternante*

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots \ (u_n > 0) \tag{1}$$

*es tal que sus términos*

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots \tag{2}$$

y

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0, \tag{3}$$

*entonces, la serie* (1) *converge, su suma es positiva y no supera el primer término.*

**Demostración.** Analicemos la suma de los $n = 2m$ primeros términos de la serie (1):

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

De la condición (2) se deduce que las expresiones entre los paréntesis son positivas. Por consiguiente, la suma $s_{2m}$ es positiva, $s_{2m} > 0$, y crece, con el aumento de $m$.

Escribamos ahora esta misma suma de modo siguiente:

$$s_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots$$
$$\ldots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

En virtud de la condición (2), cada una de las expresiones entre paréntesis es positiva. Por eso, al restar del número $u_1$ las magnitudes encerradas entre paréntesis, obtenemos un número menor que $u_1$, es decir,

$$s_{2m} < u_1.$$

Por consiguiente, hemos determinado que, al aumentar $m$, $s_{2m}$ crece y está limitada por arriba. De esto se deduce que $s_{2m}$ tiene un límite $s$:

$$\lim_{m \to \infty} s_{2m} = s,$$

siendo

$$0 < s < u_1.$$

Sin embargo, la convergencia de la serie todavía no está demostrada; hemos demostrado solamente que la sucesión de las sumas parciales «pares» tiene como límite el número $s$. Ahora demostremos que las sumas parciales «impares» también tienden al límite $s$.

Examinemos, para esto, la suma de los $n = 2m + 1$ primeros términos de la serie (1):

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}.$$

Como, según la condición (3), $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$, tenemos

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} s_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} s_{2m} = s.$$

De este modo hemos demostrado que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ tanto con $n$ par, como con $n$ impar. Por consiguiente, la serie (1) converge.

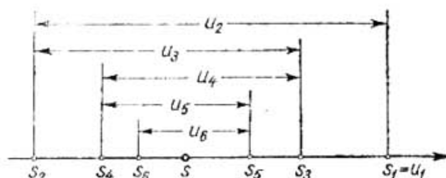



*Fig. 346*

**Observación 1.** El teorema de Leibniz se puede ilustrar geométricamente de modo siguiente. Marcaremos en una recta numérica las sumas parciales (fig. 346):
$s_1 = u_1$, $s_2 = u_1 - u_2 = s_1 - u_2$, $s_3 = s_2 + u_3$, $s_4 = s_3 - u_4$, $s_5 = s_4 + u_5$, etc.

Los puntos que corresponden a las sumas parciales, tienden a cierto punto $s$ que representa la suma de la serie. Al mismo tiempo los puntos que corresponden a las sumas parciales pares, se encuentran a la izquierda de $s$ y los que corresponden a sumas impares, a la derecha de $s$.

**Observación 2.** Si la serie alternante satisface a la condición del teoremá de Leibniz, no es difícil evaluar el error que se comete, si se sustituye su suma $s$ por una suma parcial $s_n$. Al efectuar tal sustitución, suprimimos todos los términos de la serie a partir de $u_{n+1}$. Pero, estos números forman una serie alternante, cuya suma, en valor absoluto, es menor que el primer término de esta serie (es decir, es menor que $u_{n+1}$). Por lo tanto, el error que se comete al sustituir $s$ por $s_n$, no supera, en valor absoluto, el primer de los términos suprimidos.

**Ejemplo 1.** La serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

converge, puesto que

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} \ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

La suma de los $n$ primeros términos de esta serie

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

difiere de la suma $s$ de la serie en una magnitud menor que $\frac{1}{n+1}$.

**Ejemplo 2.** La serie

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots$$

converge, en virtud del teorema de Leibniz.

## § 8. SERIES CON TERMINOS POSITIVOS Y NEGATIVOS. CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONDICIONAL

Una serie cuyos términos pueden ser tanto positivos como negativos se llama serie *con términos positivos y negativos.*

Las series alternantes, examinadas en el párrafo anterior, son, evidentemente, un caso particular de las series con términos positivos y negativos.

Analicemos algunas propiedades de las series con términos positivos y negativos.

Pero, a diferencia de lo aceptado en el párrafo anterior, supongamos ahora que los números $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ pueden ser tanto positivos, como negativos.

Demos, ante todo, un criterio suficiente, muy importante, de convergencia de una serie con términos positivos y negativos.

**Teorema 1.** *Si la serie con términos positivos y negativos*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

*es tal que la serie compuesta de valores absolutos de sus términos*

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots, \tag{2}$$

*converge, entonces la serie dada con términos positivos y negativos también converge.*

**Demostración.** Sean $s_n$ y $\sigma_n$ las sumas de los $n$ primeros términos de las series (1) y (2).

Sean, además, $s'_n$ la suma de todos los términos positivos y $s''_n$, la suma de los valores absolutos de todos los términos negativos

comprendidos entre los $n$ primeros términos de la serie dada; entonces:

$$s_n = s_n' - s_n''; \quad \sigma_n = s_n' + s_n''.$$

Según la hipótesis, $\sigma_n$ tiene por límite $\sigma$; $s_n'$ y $s_n''$ son las magnitudes positivas crecientes, menores que $\sigma$. Por consiguiente, ellos tienen los límites $s'$ y $s''$. De la correlación $s_n = s_n' - s_n''$ se deduce que también $s_n$ tiene un límite que es igual a $s' - s''$, es decir, la serie con términos positivos y negativos (1) converge.

El teorema demostrado permite juzgar de la convergencia de ciertas series con términos positivos y negativos. El estudio del problema sobre la convergencia de una serie con términos positivos y negativos se reduce, en este caso, al análisis de una serie con términos positivos.

Examinamos dos ejemplos.

**Ejemplo 1.** Analizar la convergencia de la serie

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1^2} + \frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2^2} + \frac{\operatorname{sen}3\alpha}{3^2} + \ldots + \frac{\operatorname{sen}n\alpha}{n^2} + \ldots, \tag{3}$$

donde $\alpha$ es un número cualquiera.

**Solución.** Examinemos junto con la serie dada, las series

$$\left|\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1^2}\right| + \left|\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2^2}\right| + \left|\frac{\operatorname{sen}3\alpha}{3^2}\right| + \ldots + \left|\frac{\operatorname{sen}n\alpha}{n^2}\right| + \ldots \tag{4}$$

y

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \tag{5}$$

La serie (5) converge (véase § 6). Los términos de la serie (4) no son mayores que los términos correspondientes de la serie (5), por consiguiente, la serie (4) también converge. Pero, entonces, en virtud del teorema demostrado, la serie dada con términos positivos y negativos (3) también converge.

**Ejemplo 2.** Analizar la convergencia de la serie

$$\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{3} + \frac{\cos 3\frac{\pi}{4}}{3^2} + \frac{\cos 5\frac{\pi}{4}}{3^3} + \ldots + \frac{\cos(2n-1)\frac{\pi}{4}}{3^n} + \ldots \tag{6}$$

**Solución.** Examinemos, junto con la serie dada, la serie

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots \tag{7}$$

Esta serie converge, puesto que es una progresión geométrica decreciente de razón 1/3. Pero, en este caso, converge también la serie dada (6), puesto que sus términos, en valores absolutos, son menores que los términos correspondientes de la serie (7).

Notemos que el criterio de convergencia, demostrado más arriba, es sólo suficiente para una serie alternante, pero no es necesario: existen las series con términos positivos y negativos tales que convergen, mientras que las series formadas de valores absolutos de

sus términos divergen. Es útil, por esto, introducir las nociones de convergencia absoluta y condicional de una serie con términos positivos y negativos, y, basándose en estas nociones, clasificar estas series.

**Definición.** La serie con términos positivos y negativos

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

se llama *absolutamente convergente*, si converge la serie formada de valores absolutos de sus términos:

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{2}$$

Si la serie con términos positivos y negativos (1) converge y la serie (2), formada de valores absolutos de sus términos, diverge, entonces la serie dada (1) se llama *condicionalmente convergente.*

**Ejemplo 3.** La serie con términos positivos y negativos

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

es condicionalmente convergente, puesto que la serie formada de valores absolutos de sus términos es la serie armónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots,$$

que diverge. Pero, la misma serie converge, lo que es fácil comprobar con ayuda del criterio de Leibniz.

**Ejemplo 4.** La serie con términos positivos y negativos

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots$$

es absolutamente convergente puesto que la serie formada de valores absolutos de sus términos:

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots,$$

converge, como fue establecido en § 4.

Utilizando la noción de convergencia absoluta, podemos formular el teorema 1 de modo siguiente: *toda serie absolutamente convergente es una serie convergente.*

En conclusión indiquemos (sin demostración) las siguientes propiedades de las series absolutamente convergentes y condicionalmente convergentes.

**Teorema 2.** *Si una serie es absolutamente convergente, ella queda absolutamente convergente con cualquier cambio del orden de sus términos. En este caso, la suma de una serie tal no depende del orden de sus términos.*

Esta propiedad no es propia de las series condicionalmente convergentes.

**Teorema 3.** *Si una serie converge condicionalmente, entonces, se puede cambiar el orden de los términos de esta serie de modo tal que la suma de la nueva serie obtenida sea exactamente igual a un número arbitrario A dado de antemano. Más aún, se puede cambiar el orden de los términos de la serie condicionalmente convergente de modo tal que la nueva serie sea divergente.*

La demostración de estos teoremas sale fuera de los marcos del presente curso.

Para ilustrar la afirmación de que la suma de una serie condicionalmente convergente puede variarse al cambiar el orden de sus términos, examinemos el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 5.** La serie con términos positivos y negativos

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots \tag{8}$$

no converge absolutamente. Designemos su suma por $s$. Es evidente, que $s>0$. Cambiemos el orden de los términos de la serie (8) de modo que después de un término positivo vayan dos términos negativos:

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}}+\ldots \tag{9}$$

Demostremos que la serie obtenida converge, pero su suma $s'$ es dos veces menor que la suma de la serie (8), es decir, es igual a $\frac{1}{2}s$. Designemos por $s_n$ y $s'_n$ las sumas parciales de las series (8) y (9). Examinemos la suma $3k$ de términos de la serie (9):

$$s'_{3k}=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}s_{2k}.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{k\to\infty}s'_{3k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}s_{2k}=\frac{1}{2}s.$$

Luego,

$$\lim_{k\to\infty}s'_{3k+1}=\lim_{k\to\infty}\left(s'_{3k}+\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2}s,$$

$$\lim_{k\to\infty}s'_{3k+2}=\lim_{k\to\infty}\left(s'_{3k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{4k+2}\right)=\frac{1}{2}s.$$

De este modo, obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} s'_n = s' = \frac{1}{2} s.$$

Pues, en este caso la suma de la serie se ha cambiado después de la permutación de sus términos (se ha reducido en doble).

## § 9. SERIES DE FUNCIONES

La serie $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ se llama *serie de funciones*, si sus términos son funciones de $x$.

Examinemos una serie de funciones:

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

Dando a $x$ determinados valores numéricos, obtenemos diferentes series numéricas que pueden ser tanto convergentes, como divergentes.

El conjunto de los valores de $x$, para los cuales la serie de funciones converge, se llama *dominio de convergencia* de esta serie.

Es evidente, que en el dominio de convergencia de una serie de funciones su suma es cierta función de $x$. Por eso, la suma de la serie de funciones se designa por $s(x)$.

**Ejemplo.** Examinemos la serie de funciones

$$1 + x + x^2 \ \ldots + x^n + \ldots$$

Esta serie converge para todos los valores de $x$ en el intervalo $(-1, 1)$, es decir, para todos los valores $x$ que satisfacen a la condición $|x| < 1$. Para todo valor de $x$ en el intervalo $(-1, 1)$ la suma de la serie es igual a $\frac{1}{1-x}$ (la suma de una progresión geométrica decreciente con razón $x$). Por consiguiente, en el intervalo $(-1, 1)$ la serie dada determina la función

$$s(x) = \frac{1}{1-x},$$

que es la suma de la serie, es decir,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Designemos por $s_n(x)$ la suma de los $n$ primeros términos de la serie (1). Si esta serie converge y su suma es igual a $s(x)$, entonces $s(x) = s_n(x) + r_n(x)$, donde $r_n(x)$ es la suma de la serie $u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$, o sea,

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$$

En este caso la magnitud $r_n(x)$ se llama *resto de la serie* (1). Para todos los valores de $x$ en el dominio de convergencia de la serie tiene lugar la correlación $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$, por eso:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} [s(x) - s_n(x)] = 0,$$

es decir, **el resto $r_n(x)$ de una serie convergente tiende a cero, cuando $n \to \infty$.**

## § 10. SERIES MAYORANTES

**Definición.** La serie de funciones

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ \dots\ +u_n(x)+\ \dots \tag{1}$$

se llama *mayorante* en cierto dominio de variación de $x$, si existe una serie numérica convergente

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ \dots\ +\alpha_n+\ \dots \tag{2}$$

con términos positivos tal que para todos los valores de $x$ del dominio dado se cumplan las correlaciones

$$|\,u_1(x)\,|\leqslant\alpha_1,\ |\,u_2(x)\,|\leqslant\alpha_2,\ \dots,\ |\,u_n(x)\,|\leqslant\alpha_n,\dots \tag{3}$$

En otras palabras, una serie se llama *mayorante*, si cada uno de sus términos no es mayor, en valor absoluto, que el término correspondiente de cierta serie numérica convergente con términos positivos.

Por ejemplo, la serie

$$\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\ \dots\ +\frac{\cos nx}{n^2}+\ \dots$$

es mayorante en todo el eje $Ox$. Efectivamente, para todos los valores de $x$ se cumple la correlación

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}\qquad (n=1,2\ ,\ \dots),$$

y la serie

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ \dots,$$

como es sabido, converge.

Directamente de la definición se deduce que una serie mayorante en cierto dominio converge absolutamente en todos los puntos de este último (véase § 8). Además, una serie mayorante posee la siguiente propiedad importante

**Teorema.** *Supongamos que la serie de funciones*

$$u_1(x)+u_2(x)+\ \dots\ +u_n(x)+\ \dots$$

*es mayorante en el segmento* $[a,\ b]$. *Sean* $s(x)$ *la suma de esta serie;* $s_n(x)$, *la suma de los* $n$ *primeros términos de esta serie. Entonces a cada número* $\varepsilon>0$ *arbitrariamente pequeño corresponde un número positivo* $N$ *tal, que para todos* $n\geqslant N$ *se cumpla la desigualdad*

$$|\,s(x)-s_n(x)\,|<\varepsilon,$$

*cualquiera que sea el valor de* $x$ *en el segmento* $[a,\ b]$.

**Demostración.** Designemos por $\sigma$ la suma de la serie (2):

$$\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n + \alpha_{+n1} + \ldots,$$

entonces

$$\sigma = \sigma_n + \varepsilon_n,$$

donde $\sigma_n$ es la suma de los $n$ primeros términos de la serie (2), y $\varepsilon_n$, la suma de todos los demás términos de esta serie, es decir

$$\varepsilon_n = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots$$

Como esta serie converge, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

Representemos ahora la suma de la serie de funciones (1) en la forma:

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x),$$

donde

$$s_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x),$$

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + \ldots$$

De la condición (3) se deduce que

$$|u_{n+1}(x)| \leqslant \alpha_{n+1}, \quad |u_{n+2}(x)| \leqslant \alpha_{n+2}, \ldots,$$

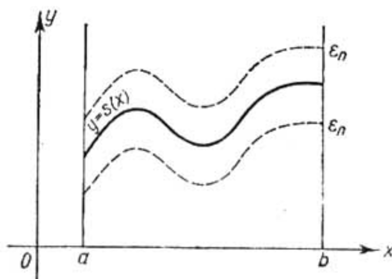



*Fig. 347*

y por eso $|r_n(x)| \leqslant \varepsilon_n$ para todos los $x$ del dominio examinado.

De este modo,

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon_n$$

para todos los $x$ del segmento $[a, b]$, donde $\varepsilon_n \to 0$, cuando $n \to \infty$.

**Observación 1.** El resultado obtenido podemos ilustrarlo geométricamente del modo siguiente.

Examinemos la gráfica de la función $y = s(x)$. Tracemos junto a esta curva una faja de ancho $2\varepsilon_n$, es decir, tracemos las curvas $y = s(x) + \varepsilon_n$ e $y = s(x) - \varepsilon_n$ (fig. 347). En este caso para todo $\varepsilon_n$, la gráfica de la función $s_n(x)$ será comprendida integramente en la faja examinada. En esta misma faja se hallarán también las gráficas de todas las sumas parciales posteriores.

**Observación 2.** No toda serie de funciones convergente en el segmento $[a, b]$ posee sin falta la propiedad indicada en el teorema demostrado. Pero existen también series no mayorantes que poseen dicha propiedad. Toda serie que tiene la propiedad indicada se llama *serie uniformemente convergente en el segmento* $[a, b]$.

Pues, *la serie de funciones* $u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ *se llama uniformemente convergente en el segmento* $[a, b]$, *si a todo número positivo* $\varepsilon > 0$ *arbitrariamente pequeño corresponde un número* $N$ *tal que para todos los* $n \geqslant N$ *se cumpla la desigualdad*

$$| s(x) - s_n(x) | < \varepsilon$$

*para cualquier* $x$ *del segmento* $[a, b]$.

Del teorema demostrado se deduce que una serie mayorante es una serie uniformemente convergente.

## § 11. CONTINUIDAD DE LA SUMA DE UNA SERIE

Sea una serie de funciones continuas

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

convergente en cierto segmento $[a, b]$.

En el capítulo II (tomo I) hemos demostrado un teorema de que la suma de un número finito de funciones continuas es una función continua. Esta propiedad no se conserva para la suma de una serie (integrada por un número infinito de sumandos). Algunas series de funciones con términos continuos tienen por suma una función continua, otras series de funciones con términos continuos tienen por suma una función discontinua.

**Ejemplo.** Examinemos la serie

$$(x^{\frac{1}{3}} - x) + (x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}) + (x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}}) + \ldots + (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}) + \ldots$$

Los términos de esta serie (cada uno está entre paréntesis) son funciones continuas para todos los valores de $x$. Demostremos que esta serie converge y su suma es una función discontinua.

Hallemos la suma de los $n$ primeros términos de esta serie:

$$s_n = x^{\frac{1}{2n+1}} - x.$$

Hallemos la suma de la serie: si $x > 0$, tenemos:

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n(x) = \lim_{n \to \infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x) = 1 - x,$$

si $x < 0$, tenemos: $s = \lim\limits_{n \to \infty} s_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} (-|x|^{\frac{1}{2n+1}} - x) = -1 - x,$

$$\text{si } x = 0, \text{ entonces } s_n = 0, \text{ por eso } s = \lim_{n \to \infty} s_n = 0.$$

De este modo tenemos:

$$s(x) = 1 - x \text{ para } x > 0,$$
$$s(x) = -1 - x \text{ para } x < 0,$$
$$s(x) = 0 \text{ para } x = 0.$$

Así, la suma de la serie estudiada es una función discontinua, su gráfica está representada en la fig. 348, donde se dan también las gráficas de las sumas parciales $s_1(x)$, $s_2(x)$ y $s_3(x)$.

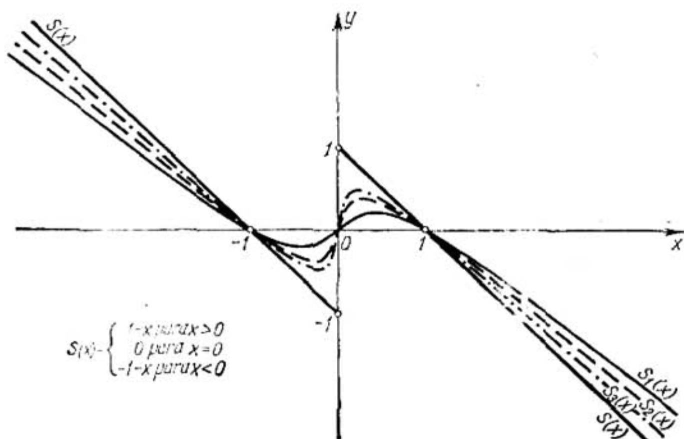



*Fig. 348*

Para las series mayorantes es válido el siguiente teorema.

**Teorema.** *La suma de una serie de funciones continuas, mayorante en un cierto segmento $[a, b]$ es una función continua en este segmento.*

**Demostración.** Supongamos que tenemos una serie de funciones continuas, mayorante en el segmento $[a, b]$:

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots \tag{1}$$

Escribamos su suma en la forma:

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x),$$

donde

$$s_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x),$$

y

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$$

Tomemos en el segmento $[a, b]$ un valor arbitrario del argumento $x$ y le asignamos un incremento $\Delta x$ tal que el punto $x + \Delta x$ se halle también en el segmento $[a, b]$.

Introduzcamos las designaciones:

$$\Delta s = s(x + \Delta x) - s(x);$$
$$\Delta s_n = s_n(x + \Delta x) - s_n(x);$$

entonces,

$$\Delta s = \Delta s_n + r_n(x + \Delta x) - r_n(x),$$

de donde

$$|\Delta s| \leqslant |\Delta s_n| + |r_n(x + \Delta x)| + |r_n(x)|. \qquad (2)$$

Esta desigualdad es válida para cualquier número $n$.

Para demostrar la continuidad de $s(x)$, es preciso mostrar que para cualquier número dado de antemano $\varepsilon > 0$, arbitrariamente pequeño, existe un número $\delta > 0$ tal que para todos los $|\Delta x| < \delta$ sea $|\Delta s| < \varepsilon$.

Puesto que la serie dada (1) es mayorante, entonces, a cualquier $\varepsilon > 0$ dado de antemano corresponde un número $N$ tal que para todos los $n \geqslant N$, y, en particular, para $n = N$, se cumpla la desigualdad

$$|r_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (3)$$

cualquier que sea $x$ en el segmento $[a, b]$. El valor de $x + \Delta x$ se halla en el segmento $[a, b]$ y por eso se cumple la desigualdad

$$|r_N(x + \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (3')$$

Luego, para $N$ elegido, la suma parcial $s_N(x)$ es una función continua (la suma de un número finito de funciones continuas), y, por consiguiente, se puede elegir un número positivo $\delta$ tal que para todo $\Delta x$ que satisface a la condición $|\Delta x| < \delta$ se cumple la desigualdad

$$|\Delta s_N| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (4)$$

En virtud de las desigualdades (2), (3), (3') y (4) tenemos:

$$|\Delta s| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

es decir,

$$|\Delta s| < \varepsilon \text{ para } |\Delta x| < \delta,$$

lo que significa que $s(x)$ es una función continua en el punto $x$ (y, por consiguiente, en todo punto del segmento $[a, b]$).

**Observación.** Del teorema demostrado se deduce que si la suma de una serie en cierto segmento $[a, b]$ es discontinua, la serie no es mayorante en este segmento. En particular, no es mayorante (en

cualquier segmento que contenga el punto $x = 0$, es decir, el punto de discontinuidad de la suma de la serie) la serie estudiada en el ejemplo.

Notemos, por fin, que la suposición inversa no es correcta: existen series no mayorantes en un segmento, pero que son, sin embargo, convergentes en este segmento hacia una función continua. En particular, toda serie uniformemente convergente en el segmento $[a, b]$ (incluso, si ésta no es mayorante) tiene por su suma una función continua (naturalmente, si todos los términos de la serie son continuos).

## § 12. INTEGRACION Y DERIVACION DE LAS SERIES

**Teopema 1.** *Sea una serie de funciones continuas*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots, \tag{1}$$

*mayorante en el segmento $[a, b]$ y sea $s(x)$ la suma de esta serie. Entonces, la integral de $s(x)$ entre los límites desde $\alpha$ hasta $x$, pertenecientes al segmento $[a, b]$ es igual a la suma de semejantes integrales de los términos de la serie dada, es decir*

$$\int_\alpha^x s(x)\,dx = \int_\alpha^x u_1(x)\,dx + \int_\alpha^x u_2(x)\,dx + \ldots + \int_\alpha^x u_n(x)\,dx + \ldots$$

**Demostración.** Podemos representar la función $s(x)$ en la forma

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x)$$

ó

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + r_n(x).$$

Entonces:

$$\int_\alpha^x s(x)\,dx = \int_\alpha^x u_1(x)\,dx + \int_\alpha^x u_2(x) + \ldots$$

$$\ldots + \int_\alpha^x u_n(x)\,dx + \int_\alpha^x r_n(x)\,dx \tag{2}$$

(la integral de la suma de un número **finito** de sumandos es igual a la suma de los integrales de estos términos).

Como la serie inicial (1) es mayorante, entonces para cualquier $x$ tenemos: $|r_n(x)| < \varepsilon_n$, donde $\varepsilon_n \to 0$, cuando $n \to \infty$; por eso

$$\left|\int_\alpha^x r_n(x)\,dx\right| \leqslant \int_\alpha^x |r_n(x)|\,dx < \int_\alpha^x \varepsilon_n\,dx = \varepsilon_n(x-\alpha) \leqslant \varepsilon_n(b-a).$$

Puesto que $\varepsilon_n \to 0$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^x r_n(x)\,dx = 0.$$

Pero de la igualdad (2) obtenemos:

$$\int_{\alpha}^{x} r_n(x)\,dx = \int_{\alpha}^{x} s(x)\,dx - \left[\int_{\alpha}^{x} u_1(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha}^{x} u_n(x)\,dx\right].$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_{\alpha}^{x} s(x)\,dx - \left[\int_{\alpha}^{x} u_1(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha}^{x} u_n(x)\,dx\right]\right\} = 0,$$

o sea,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_{\alpha}^{x} u_1(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha}^{x} u_n(x)\,dx\right] = \int_{\alpha}^{x} s(x)\,dx. \tag{3}$$

La suma entre corchetes es una suma parcial de la serie

$$\int_{\alpha}^{x} u_1(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha}^{x} u_n(x)\,dx + \ldots \tag{4}$$

Como las sumas parciales de esta serie tienen un límite, dicha serie converge y su suma, en virtud de la igualdad (3), es igual a $\int_{\alpha}^{x} s(x)dx$, es decir,

$$\int_{\alpha}^{x} s(x)\,dx = \int_{\alpha}^{x} u_1(x)\,dx + \int_{\alpha}^{x} u_2(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha}^{x} u_n(x)\,dx + \ldots$$

Esta es la igualdad que se trataba de demostrar.

**Observación 1.** Si la serie no es mayorante, no siempre es posible la integración de la serie, término a término, es decir, la integral $\int_{\alpha}^{x} s(x)\,dx$ de la suma de la serie (1) no siempre es igual a la suma de las integrales de sus términos (es decir, a la suma de la serie (4)).

**Teorema 2.** *Si la serie*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots, \tag{5}$$

*formada de funciones que tienen derivadas continuas en el segmento* $[a, b]$, *converge en este segmento hacia la suma* $s(x)$ *y la serie*

$$u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots, \tag{6}$$

*formada de las derivadas de sus términos, es mayorante en este segmento, entonces la suma de la serie de las derivadas es igual a la derivada de la suma de la serie inicial,* es decir,

$$s'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots$$

**Demostración.** Designemos por $F(x)$ la suma de la serie (6):

$$F(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots,$$

y demostremos que

$$F(x) = s'(x).$$

Como la serie (6) es mayorante, entonces, en virtud del teorema anterior, tenemos:

$$\int_{\alpha}^{x} F(x)\,dx = \int_{\alpha}^{x} u_1'(x)\,dx + \int_{\alpha}^{x} u_2'(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha}^{x} u_n'(x)\,dx + \ldots$$

Efectuando la integración en el segundo miembro, obtenemos:

$$\int_{\alpha}^{x} F(x)\,dx = [u_1(x) - u_1(\alpha)] + [u_2(x) - u_2(\alpha)] + \ldots$$
$$+ [u_n(x) - u_n(\alpha)] + \ldots$$

Pero, según la condición,

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$
$$s(\alpha) = u_1(\alpha) + u_2(\alpha) + \ldots + u_n(\alpha) + \ldots,$$

cualesquiera que sean los números $x$ y $\alpha$ en el segmento $[a, b]$. Por eso

$$\int_{\alpha}^{x} F(x)\,dx = s(x) - s(\alpha).$$

Derivando respecto a $x$ ambos miembros de la última igualdad obtenemos:

$$F(x) = s'(x).$$

De este modo, hemos demostrado que, satisfechas las condiciones del teorema, la derivada de la suma de una serie es igual a la suma de las derivadas de los términos de la serie.

**Observación 2.** Es muy importante que la serie de derivadas sea mayorante; en el caso contrario puede pasar a ser imposible la derivación, término a término, de la serie. Para confirmarlo, citemos un ejemplo de la serie mayorante que no permite la derivación, término a término.

Examinemos la serie

$$\frac{\operatorname{sen} 1^4 x}{1^2} + \frac{\operatorname{sen} 2^4 x}{2^2} + \frac{\operatorname{sen} 3^4 x}{3^2} + \ldots + \frac{\operatorname{sen} n^4 x}{n^2} + \ldots$$

Esta serie converge hacia una función continua, puesto que es mayorante. Efectivamente, para cualquier $x$, sus términos son menores, en valores absolutos, que los términos positivos de la serie numérica convergente:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

Escribamos una serie formada de las derivadas de los términos de la serie inicial:

$$\cos x + 2^2 \cos 2^4 x + \ldots + n^2 \cos n^4 x + \ldots$$

Esta serie diverge. Así, por ejemplo, cuando $x = 0$, ésta se convierte

en la serie

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + \ldots$$

(Se puede demostrar que esta serie diverge no sólo cuando $x = 0$).

## § 13. SERIES DE POTENCIAS. INTERVALO DE CONVERGENCIA

**Definición 1.** Se llama *serie de potencia* a una serie de funciones de la forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \quad (1)$$

donde $a_0$, $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$, ... son números constantes llamados coeficientes de la serie.

El dominio de convergencia de una serie de potencias siempre es cierto intervalo que puede, en particular, reducirse a un punto. Para cerciorarse de esto, demostremos, primero, el teorema siguiente, muy importante para toda la teoría de las series de potencias.

**Teorema 1. (Teorema de Abel).** 1) *Si una serie de potencias converge, para un cierto valor de $x_0$ no igual a cero, entonces ésta converge absolutamente para todo valor de $x$, para el cual*

$$|x| < |x_0|;$$

2) *si la serie diverge para cierto valor de $x_0'$, entonces ésta diverge para todo valor $x$, para el cual*

$$|x| > |x_0'|.$$

**Demostración.** 1) Puesto que, según la hipótesis, la serie numérica

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n + \ldots \quad (1')$$

converge, su término general $a_nx_0^n \to 0$, cuando $n \to \infty$; pero esto significa que existe un número positivo $M$ tal, que todos los términos de la serie sean menores, en valor absoluto, que $M$.

Escribamos la serie (1) en la forma:

$$a_0 + a_1x_0\left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2x_0^2\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + a_nx_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \ldots \quad (1a)$$

y analicemos la serie de los valores absolutos de sus términos:

$$|a_0| + |a_1x_0|\left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2x_0^2|\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots$$

$$\ldots + |a_nx_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \quad (2)$$

Los términos de esta serie son menores que los términos correspondientes de la serie

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \qquad (3)$$

Cuando $|x| < |x_0|$, la última serie es una progresión geométrica con razón $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, y, por consiguiente, ella converge. Puesto que los términos de la serie (2) son menores que los términos correspondientes de la serie (3), la serie (2) también converge, pero esto significa que la serie (1a) ó (1) converge absolutamente.

2) Ahora *no es difícil demostrar la segunda parte del teorema:* supongamos que la serie (1) diverge en cierto punto $x_0'$. Entonces esta serie divergerá también en todo punto $x$ que satisfaga a la condición $|x| > |x_0'|$. En efecto, si la serie converge en un cierto punto $x$ que satisface a esta condición, entonces, en virtud de la *primera parte del teorema recién demostrado, debería converger* también en el punto $x_0'$, puesto que $|x_0'| < |x|$. Pero esto contradice a la hipótesis de que la serie diverge en el punto $x_0'$. Por consiguiente, la serie diverge también en el punto $x$. De este modo, el teorema queda demostrado por completo.

*El teorema de Abel permite juzgar sobre la disposición de los* puntos de convergencia y divergencia de una serie de potencias. En efecto, si $x_0$ es un punto de convergencia, entonces todos los puntos del intervalo $(-|x_0|, |x_0|)$ son los puntos de convergencia absoluta. Si $x_0'$ es un punto de divergencia, entonces toda la semi*rrecta infinita a la derecha del punto* $|x_0'|$, *y toda la semirrecta* a la izquierda del punto $-|x_0'|$ son compuestas de puntos de divergencia.

Esto permite concluir que existe un número $R$ tal, que, para $|x| < R$, tenemos los puntos de convergencia absoluta y, para $|x| > R$, *los puntos de divergencia.*

De este modo, existe un teorema siguiente sobre la estructura del dominio de convergencia de una serie de potencias:

**Teorema 2.** *El dominio de convergencia de una serie de potencias es un intervalo con centro en el origen de las coordenadas.*

**Definición 2.** Un intervalo desde $-R$ hasta $+R$ tal que, para todo punto $x$, comprendido dentro de los límites de este intervalo, la serie converge absolutamente, y para los puntos $x$ que se encuentran fuera del mismo, la serie diverge, se llama *intervalo de convergencia* de una serie de potencias (fig. 349). El número $R$ se llama *radio de convergencia* de la serie de potencias.

En los extremos del intervalo (es decir, en los puntos $x = R$ y $x = -R$) la cuestión de la convergencia o divergencia de cada serie concreta dada se resuelve individualmente.

Notemos que en algunas series el intervalo de convergencia se reduce a un punto ($R = 0$), y en otras, abarca todo el eje $Ox$ ($R = \infty$).

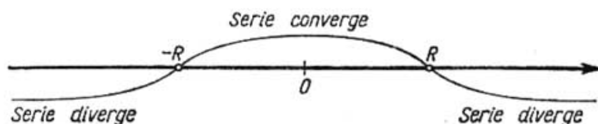



*Fig. 349*

Indiquemos el modo de determinación del radio de convergencia de una serie de potencias.

Sea una serie

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

Examinemos la serie formada de los valores absolutos de sus términos:

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + |a_3||x|^3 + \\ + |a_4||x|^4 + \dots + |a_n||x|^n + \dots \quad (4)$$

Para determinar la convergencia de esta última serie (con términos positivos) apliquemos el criterio de d'Alembert.

Supongamos que existe el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = L|x|.$$

Entonces, según el criterio de d'Alembert, la serie (4) converge, cuando $L|x| < 1$, es decir, si $|x| < \frac{1}{L}$, y diverge, cuando $L|x| > 1$, es decir, si $|x| > \frac{1}{L}$.

Por consiguiente, la serie (1) converge absolutamente para $|x| < \frac{1}{L}$. Pero, si $|x| > \frac{1}{L}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |x| L > 1$ y la serie (4) diverge, mientras su término general no tiende a cero*). En este caso el término general de la serie de potencias dada (1) tampoco tiende a cero y esto significa, en virtud del criterio necesario

*) Acordemos que, al demostrar el criterio de d'Alembert (véase el § 4), hemos revelado que si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, entonces el término general de la serie crece y, por consiguiente, no tiende a cero.

de convergencia, que esta serie de potencias diverge $\left(\text{cuando } |x| > \frac{1}{L}\right)$.

De lo expuesto anteriormente se deduce que el intervalo $\left(-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}\right)$ es el intervalo de convergencia de la serie de potencias (1), es decir,

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

De manera semejante, para determinar el intervalo de convergencia se puede aplicar el criterio de Cauchy, entonces:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

**Ejemplo 1.** Determinar el intervalo de convergencia de la serie:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

**Solución.** Aplicando directamente el criterio de d'Alembert, obtenemos:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = |x|$$

Por consiguiente, la serie converge para $|x| < 1$ y diverge para $|x| > 1$. El estudio de la serie en los extremos del intervalo $(-1, 1)$ mediante el criterio de d'Alembert es imposible. Sin embargo, se puede ver directamente que la serie diverge, cuando $x = -1$ y $x = 1$.

**Ejemplo 2.** Determinar el intervalo de convergencia de la serie:

$$\frac{2x}{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \ldots$$

**Solución.** Aplicamos el criterio de d'Alembert

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{(2x)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(2x)^n}{n}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| |2x| = |2x|.$$

La serie converge, cuando $|2x| < 1$, es decir, si $|x| < \frac{1}{2}$; la serie converge, cuando $x = \frac{1}{2}$; la serie diverge, cuando $x = -\frac{1}{2}$.

**Ejemplo 3.** Determinar el intervalo de convergencia de la serie

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

**Solución.** Aplicando el criterio de d'Alembert, obtenemos:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1} n!}{x^n (n+1)!} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1.$$

Como el límite no depende de $x$ y es menor que la unidad, la serie converge para todos los valores de $x$.

**Ejemplo 4.** La serie $1 + x + (2x)^2 + (3x)^3 + \ldots + (nx)^n + \ldots$ diverge para todos los valores de $x$, excepto $x = 0$, puesto que $(nx)^n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, cualquiera que sea el valor de $x$, diferente de cero.

**Teorema 3.** *Una serie de potencias*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad (1)$$

*es mayorante en todo el segmento* $[-\rho, \rho]$ *íntegramente dispuesto en el interior del intervalo de convergencia.*

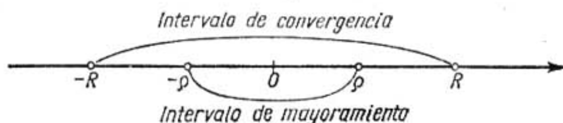



*Fig. 350*

**Demostración.** Según la hipótesis, $\rho < R$ (fig. 350), por eso la serie numérica (con términos positivos)

$$|a_0| + |a_1|\rho + |a_2|\rho^2 + \ldots + |a_n|\rho^n \qquad (5)$$

converge. Pero cuando $|x| < \rho$, los términos de la serie (1) no son mayores, en valor absoluto, que los términos correspondientes de la serie (5). Por consiguiente, la serie (1) es mayorante en el segmento $[-\rho, \rho]$.

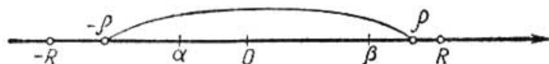



*Fig. 351*

**Corolario 1.** *La suma de una serie de potencias es una función continua en todo segmento íntegramente dispuesto en el interior del intervalo de convergencia.* Efectivamente, la serie es mayorante en este segmento y sus términos son las funciones continuas de $x$. Por consiguiente, en virtud del teorema 1, § 11, la suma de esta serie es una función continua.

**Corolario 2.** *Si los límites de integración $\alpha$, $\beta$ se encuentran en el interior del intervalo de convergencia de una serie de potencias, la integral de la suma de la serie es igual a la suma de las integrales de los términos de la serie*, puesto que el dominio de integración se le puede encerrar dentro del segmento $[-\rho, \rho]$ donde la serie es mayorante (fig. 351) (véase el teorema 2, § 12 sobre la posibilidad de integración, término a término, de la serie mayorante).

## § 14. DERIVACION DE LAS SERIES DE POTENCIAS

**Teorema 1.** *Si la serie de potencias*

$$s(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad (1)$$

*tiene un intervalo de convergencia* $(-R, R)$, *entonces la serie*

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots, \qquad (2)$$

*obtenida por la derivación término a término de la serie (1) tiene el mismo intervalo de convergencia* $(-R, R)$; *siendo* $\varphi(x) = s'(x)$, *cuando* $|x| < R$, *es decir, dentro del intervalo de convergencia la derivada de la suma de la serie de potencias (1) es igual a la suma de la serie obtenida por la derivación término a término de la serie (1).*

**Demostración.** Demostremos que la serie (2) es mayorante en todo segmento $[-\rho, \rho]$ íntegramente dispuesto en el interior del intervalo de convergencia.




*Fig. 352*

Tomemos un punto $\xi$ tal que $\rho < \xi < R$ (fig. 352). En este punto la serie (1) converge, por consiguiente, $\lim_{n\to\infty} a_n\xi^n = 0$, y por eso, se puede indicar un número constante $M$ tal, que

$$|a_n\xi^n| < M \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Si, $|x| \leqslant \rho$, entonces:

$$|na_nx^{n-1}| \leqslant |na_n\rho^{n-1}| = n|a_n\xi^{n-1}|\left|\frac{\rho}{\xi}\right|^{n-1} < n\frac{M}{\xi}q^{n-1},$$

donde

$$q = \frac{\rho}{\xi} < 1.$$

De este modo, cuando $|x| \leqslant \rho$, los términos de la serie (2), en valor absoluto, son menores que los términos de la serie numérica positiva con términos constantes:

$$\frac{M}{\xi}(1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} + \ldots).$$

Pero, como muestra el uso del criterio de d'Alembert, la última serie converge:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nq^{n-1}}{(n-1)\,q^{n-2}} = q < 1.$$

Por consiguiente, la serie (2) es mayorante en el segmento $[-\rho, \rho]$, y, en virtud del teorema 2, § 12, su suma es la derivada de la suma de la serie dada en el segmento $[-\rho, \rho]$, es decir,

$$\varphi(x) = s'(x).$$

Como todo punto interior del intervalo $(-R, R)$ se puede incluir en cierto segmento $[-\rho, \rho]$, de ahí se deduce que la serie (2) converge en cualquier punto interior del intervalo $(-R, R)$.

Demostremos que la serie (2) fuera del intervalo $(-R, R)$, diverge. Supongamos que la serie (2) converge para $x_1 > R$. Integrándola término a término en el intervalo $(0, x_2)$, donde $R < x_2 < x_1$, obtenemos la serie (1) que converge en el punto $x_2$, pero esto contradice a las condiciones del teorema. De este modo, el intervalo $(-R, R)$ es el intervalo de convergencia de la serie (2). El teorema es plenamente demostrado.

Se puede de nuevo derivar la serie (2) término a término y continuarlo tantas veces cuanto se quiera. De este modo, obtenemos la deducción:

**Teorema 2.** *Si una serie de potencias converge en intervalo $(-R, R)$, su suma representa una función que tiene en el interior del intervalo de convergencia las derivadas de cualquier orden, cada una de las cuales es la suma de la serie obtenida por derivación de término a término de la serie dada unas veces correspondientes; en este caso el intervalo de convergencia de cada serie obtenida por derivación, es el mismo intervalo $(-R, R)$.*

## § 15. SERIES DE POTENCIAS DE $x - a$

Una serie de funciones de la forma

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots, \qquad (1)$$

se llama *serie de potencias*.

Aquí las constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ se llaman también los coeficientes de la serie. Esta serie está dispuesta según las potencias crecientes del binomio $x - a$.

Cuando $a = 0$, obtenemos una serie de potencias de $x$ que es, por consiguiente, un caso particular de la serie (1).

Para determinar el dominio de convergencia de la serie (1), sustituyamos en ésta la variable

$$x - a = X.$$

Después de la sustitución la serie (1) toma el aspecto

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n + \ldots, \qquad (2)$$

es decir, hemos obtenido la serie de potencias de $X$.

Sea $-R < X < R$ el intervalo de convergencia de la serie (2) (fig. 353, α). De ahí se deduce que la serie (1) convergerá para los valores de $x$ que satisfagan a la desigualdad $-R < x - a < R$, o bien $a - R < x < a + R$. Puesto que la serie (2) diverge para

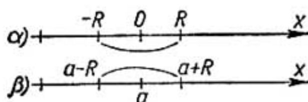



*Fig. 353*

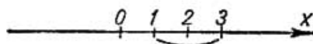



*Fig. 354*

$|X| > R$, entonces la serie (1) divergerá para $|x - a| > R$, es decir, divergerá fuera del intervalo $a - R < x < a + R$ (fig. 353, β).

Por consiguiente, el intervalo de convergencia de la serie (1) es el intervalo $(a - R, a + R)$ con centro en el punto $a$. Todas las propiedades de la serie de potencias de $x$ en el interior del intervalo de convergencia $(-R, +R)$ se conservan completamente para una serie de potencias de $x - a$ en el interior del intervalo de convergencia $(a - R, a + R)$. Así, por ejemplo, efectuada la integración término a término de la serie de potencias (1), si los límites de integración se hallan en el interior del intervalo de convergencia $(a - R, a + R)$, obtenemos una serie cuya suma es igual a la integral correspondiente de la suma de la serie dada (1). Durante la derivación, término a término, de la serie de potencias (1), para todos los valores de $x$ que se hallan en el interior del intervalo de convergencia $(a - R, a + R)$, obtenemos una serie cuya suma es igual a la derivada de la suma de la serie dada (1).

**Ejemplo.** Hallar el dominio de convergencia de la serie

$$(x-2) + (x-2)^2 + (x-2)^3 + \ldots + (x-2)^n + \ldots$$

**Solución.** Poniendo $x - 2 = X$, obtenemos la serie

$$X + X^2 + X^3 + \ldots + X^n + \ldots$$

Esta serie converge para $-1 < X < +1$. Por consiguiente, la serie dada converge para todos los valores de $x$, para los cuales $-1 < x - 2 < 1$, es decir, cuando $1 < x < 3$ (fig. 354).

## § 16. SERIES DE TAYLOR Y DE MACLAURIN

En el § 6 del capítulo IV (tomo I) mostramos que para una función $f(x)$ que tiene todas las derivadas hasta $(n + 1)$-ésimo orden inclusive, en la vecindad del punto $x = a$ (es decir, en cierto inter-

valo que contiene el punto $x = a$) es válida la fórmula de Taylor:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \\ + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x), \qquad (1)$$

donde así llamado término complementario $R_n(x)$ se calcula según la fórmula

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)], \qquad 0 < \theta < 1.$$

Si la función $f(x)$ tiene las derivadas de todos los órdenes en la vecindad del punto $x = a$, entonces podemos tomar $n$ arbitrariamente grande en la fórmula de Taylor. Supongamos que en la vecindad considerada el término complementario $R_n$ tiende a cero, cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Entonces, pasando en la fórmula (1) al límite, cuando $n \to \infty$, obtenemos a la derecha una serie infinita que se llama *serie de Taylor*:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots \qquad (2)$$

La última igualdad se verifica sólo en el caso, si $R_n(x) \to 0$, cuando $n \to \infty$. En este caso la serie de segundo miembro converge y su suma es igual a la función dada $f(x)$. Demostremos que esto es efectivamente así:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

donde

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Puesto que, según la condición, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, entonces:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x).$$

Pero $P_n(x)$ es $n$-ésima suma parcial de la serie (2); su límite es igual a la suma de la serie del segundo miembro de la igualdad (2). Por

consiguiente, la igualdad (2) es válida:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(a)+\ \dots$$

$$\dots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ \dots$$

De lo expuesto se deduce que *la serie de Taylor representa la función dada $f(x)$ sólo cuando* $\lim R_n(x)=0$. Si $\lim R_n(x)\neq 0$, la serie no representa la función dada, aunque puede converger (hacia otra función).

Si en la serie de Taylor ponemos $a=0$, obtenemos un caso particular de ésta, que se llama *serie de Maclaurin*:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ \dots\ +\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ \dots \qquad (3)$$

Si escribimos formalmente la serie de Taylor de una función, entonces, para demostrar que la serie escrita efectivamente representa la función dada, es preciso demostrar que el término complementario tiende a cero, o convencerse, de una u otra manera, de que la serie escrita converge hacia la función dada.

Notemos que para cada una de las funciones elementales determinadas en § 8, capítulo 1 (tomo I) existen $a$ y $R$ tales que en el intervalo $(a-R,\ a+R)$ ésta se desarrolla en la serie de Taylor, o (si $a=0$) de Maclaurin.

## § 17. EJEMPLOS DE DESARROLLO DE LAS FUNCIONES EN SERIES

**1. Desarrollo de la función $f(x)=\operatorname{sen} x$ en la serie de Maclaurin.** En § 7, capítulo IV (tomo I) hemos obtenido la fórmula

$$\operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ \dots\ +(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{2n}(x).$$

Como hemos demostrado que $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n}(x)=0$, entonces, en virtud de lo expuesto en el párrafo anterior, obtenemos el desarrollo de $\operatorname{sen} x$ en la serie de Maclaurin:

$$\operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ \dots\ +(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ \dots \qquad (1)$$

Puesto que el término complementario tiende a cero para cualquier $x$, la serie dada converge y tiene por suma la función de $\operatorname{sen} x$ para cualquier $x$.

En la fig. 355 se representan las gráficas de la función sen $x$ y de las primeras tres sumas parciales de la serie (1).

Esta serie se emplea para calcular los valores de sen $x$ para diferentes valores de $x$.

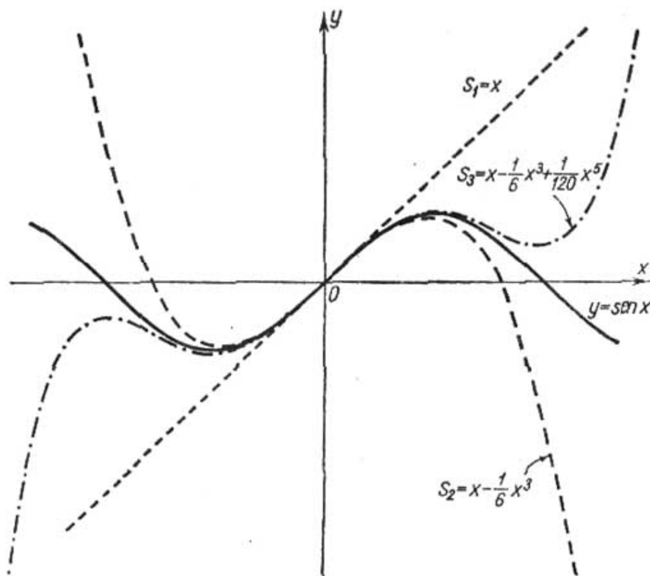



*Fig. 355*

Calculemos, por ejemplo, sen 10° con precisión de hasta $10^{-5}$. Puesto que $10° = \frac{\pi}{18} = 0{,}174533$, entonces:

$$\operatorname{sen} 10^\circ = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^7 + \ldots$$

Limitemos con los dos primeros términos y obtenemos la siguiente igualdad aproximada:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3;$$

el error cometido $\delta$ es menor, en valor absoluto, que el primero de los

términos suprimidos, es decir,

$$\delta < \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 < \frac{1}{120}(0,2)^5 < 4\cdot 10^{-6}.$$

Si calculamos cada sumando en la expresión de sen $\frac{\pi}{18}$ con seis cifras decimales, obtenemos: sen $\frac{\pi}{18} = 0{,}173647$.

Se puede garantizar que las primeras cuatro cifras son exactas.

**2. Desarrollo de la función $f(x) = e^x$ en la serie de Maclaurin.**

En virtud del § 7, capítulo IV (tomo I), tenemos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad (2)$$

puesto que hemos demostrado que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para cualquier $x$. Por consiguiente, la serie converge para todos los valores de $x$ y representa la función $e^x$.

**3. Desarrollo de la función $f x = \cos x$ en la serie de Maclaurin.**

En virtud del § 7, capítulo IV (tomo I), tenemos:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots; \quad (3)$$

para todos los valores de $x$ la serie converge y representa la función $\cos x$.

## § 18. FORMULA DE EULER

Hasta ahora hemos considerado solamente las series con términos reales, sin tocar las series con términos complejos. Sin exponer la teoría completa de las series con términos complejos que sale fuera de los límites de la obra presente, examinemos sólo un ejemplo importante de este campo.

En el capítulo VII (tomo I) hemos determinado la función $e^{x+iy}$ por la igualdad

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Para $x = 0$, obtenemos la fórmula de Euler:

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y.$$

Si definimos la función exponencial $e^{iy}$ con exponente imaginario mediante la fórmula (2) § 17, que representa la función $e^x$ en forma de la serie de potencias, obtenemos la misma igualdad de Euler. En

efecto, determinemos $e^{iy}$, sustituyendo en la igualdad (2) § 17 $x$ por la expresión $iy$:

$$e^{iy}=1+\frac{iy}{1!}+\frac{(iy)^2}{2!}+\frac{(iy)^3}{3!}+\ldots+\frac{(iy)^n}{n!}+\ldots \quad (1)$$

Tomando en consideración que $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, $i^6=-1$, etc., transformemos la fórmula (1) del modo siguiente:

$$e^{iy}=1+\frac{iy}{1!}-\frac{y^2}{2!}-\frac{iy^3}{2!}+\frac{y^4}{4!}+\frac{iy^5}{5!}-\ldots$$

Separando en esta serie las partes real e imaginaria, hallamos:

$$e^{iy}=\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\ldots\right)+i\left(\frac{y}{1!}-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\ldots\right).$$

Las expresiones entre los paréntesis son las series de potencias cuyas sumas son iguales, respectivamente, a $\cos y$ y $\operatorname{sen} y$ (véase las fórmulas (3) y (1) del párrafo anterior). Por consiguiente,

$$e^{iy}=\cos y+i\operatorname{sen} y.$$

De este modo, hemos llegado de nuevo a la fórmula de Euler.

## § 19. SERIE BINOMIAL

1. Desarrollemos en la serie de Maclaurin la función

$$f(x)=(1+x)^m,$$

donde $m$ es un número constante arbitrario.

Aquí la evaluación del término complementario representa ciertas dificultades, por eso, para desarrollar la función dada, procedemos de un modo algo diferente.

Notemos que la función $f(x)=(1+x)^m$ satisface a la ecuación diferencial

$$(1+x)f'(x)=mf(x) \quad (1)$$

y a la condición

$$f(0)=1,$$

hallemos una serie de potencias, cuya suma $s(x)$ satisface a la ecuación (1) y a la condición $s(0)=1$:

$$s(x)=1+a_1x-a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots^{*)}. \quad (2)$$

Poniéndola en la ecuación (1), tenemos:

$$(1+x)(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots)=$$
$$=m(1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots).$$

*) Hemos aceptado que el término absoluto es igual a la unidad en virtud de la condición inicial $s(0)=1$.

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de $x$ en ambos miembros de la igualdad, hallamos:

$a_1 = m$; $a_1 + 2a_2 = ma_1$; . . .; $na_n + (n+1)\,a_{n+1} = ma_n$; ...

De ahí obtenemos para los coeficientes de la serie las expresiones:

$$a_0 = 1;\quad a_1 = m;\quad a_2 = \frac{a_1(m-1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2};$$

$$a_3 = \frac{a_2(m-2)}{3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3};\ \ldots;$$

$$a_n = \frac{m(m-1)\ldots[m-n+1]}{1\cdot 2\ldots n};\ \ldots$$

Estos son los coeficientes binomiales.

Sustituyéndolos en la fórmula (2), obtenemos:

$$s(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\ldots n}x^n + \ldots \qquad (3)$$

Si $m$ es un número positivo entero, entonces, a partir del término que contiene $x^{m+1}$, todos los coeficientes son iguales a cero, y la serie se convierte en un polinomio. Si $m$ es fraccionario o un número negativo entero, tenemos una serie infinita.

Determinemos el radio de convergencia de la serie (3):

$$u_{n+1} = \frac{m(m-1)\ldots[m-n+1]}{n!}x^n,$$

$$u_n = \frac{m(m-1)\ldots[m-n+2]}{(n-1)!}x^{n-1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(n-1)!}{m(m-1)\ldots(m-n+2)\,n!}x\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n+1}{n}\right||x| = |x|.$$

De este modo, la serie (3) converge, cuando $|x| < 1$.

En el intervalo $(-1, 1)$ la serie (3) representa una función $s(x)$ que satisface a la ecuación diferencial (1) y a la condición

$$s(0) = 1.$$

Puesto que solamente la única función satisface a la ecuación diferencial (1) y a la condición inicial $s(0) = 1$, entonces, la suma de la serie (3) es idénticamente igual a la función $(1 + x)^m$, obtenemos el desarrollo:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots \quad (3')$$

En particular, para $m = -1$, tenemos:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \quad (4)$$

Si $m = {}^1/_2$, será:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \ldots \quad (5)$$

Cuando $m = -{}^1/_2$ tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \ldots \quad (6)$$

2. Apliquemos el desarrollo del binomio para desarrollar otras funciones. Desarrollemos en la serie de Maclaurin la función

$$f(x) = \operatorname{arcsen} x.$$

Sustituyendo en la igualdad (6) $x$ por la expresión $-x^2$, obtenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}x^{2n} + \ldots$$

Basándonos en el teorema sobre la integración de las series de potencias, obtenemos, para $|x| < 1$:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Esta serie converge en el intervalo $(-1, 1)$. Podemos demostrar que la serie converge también cuando $x = \pm 1$ y que la suma de la serie correspondiente a estos valores también es igual a arcsen $x$.

Entonces, poniendo $x = 1$, obtenemos la fórmula para calcular $\pi$:

$$\operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} + \ldots$$

## § 20. DESARROLLO DE LA FUNCION $\ln(1+x)$ EN UNA SERIE DE POTENCIAS. CALCULO DE LOGARITMOS

Integrando la igualdad (4) § 19 en los límites desde 0 hasta $x$ (para $|x| < 1$), tenemos:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)\, dx$$

ó

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad (1)$$

Esta igualdad es válida en el intervalo $(-1, 1)$.

Si en la fórmula citada sustituyemos $x$ por $-x$, obtenemos la serie

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots, \quad (2)$$

que converge en el intervalo $(-1, 1)$.

Por medio de las series (1) y (2) podemos calcular los logaritmos de los números comprendidos entre el cero y dos. Indiquemos, sin demostración, que, para $x = 1$, el desarrollo (1) es también válido.

Demos una fórmula para calcular los logaritmos naturales de los números enteros arbitrarios.

Puesto que durante la sustracción término a término de dos series convergentes obtenemos una serie convergente (véase § 1, teorema 3), entonces sustrayendo término a término la igualdad (2) de la (1) hallamos:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right].$$

Pongamos además, $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$; entonces: $x = \frac{1}{2n+1}$. Para todo $n > 0$, tenemos: $0 < x < 1$, por eso

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\frac{n+1}{n} = 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \ldots\right],$$

de donde

$$\ln(n+1)-\ln n=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\dots\right]. \quad (3)$$

Cuando $n = 1$ obtenemos:

$$\ln 2=2\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\dots\right].$$

Para calcular ln 2 con el grado de precisión dado $\delta$, es preciso calcular la suma parcial $s_p$, eligiendo un número $p$ de sus términos de modo que la suma de los términos suprimidos (es decir, el error $R_p$ cometido durante la sustitución de $s$ por $s_p$) sea menor que el error admisible $\delta$. Para eso evaluemos el error $R_p$:

$$R_p=2\left[\frac{1}{(2p+1)\,3^{2p+1}}+\frac{1}{(2p+3)\,3^{2p+3}}+\frac{1}{(2p+5)\,3^{2p+5}}+\dots\right].$$

Puesto que los números $2p + 3$, $2p + 5$, . . . son mayores que $2p + 1$, entonces, sustituyéndolos por $2p + 1$, aumentamos cada fracción. Por eso

$$R_p<2\left[\frac{1}{(2p+1)\,3^{2p+1}}+\frac{1}{(2p+1)\,3^{2p+3}}+\frac{1}{(2p+1)\,3^{2p+5}}+\dots\right],$$

ó

$$R_p<\frac{2}{2p+1}\left[\frac{1}{3^{2p+1}}+\frac{1}{3^{2p+3}}+\frac{1}{3^{2p+5}}+\dots\right].$$

La serie entre corchetes es una progresión geométrica de razón 1/9. Calculando la suma de esta progresión, hallamos:

$$R_p<\frac{2}{2p+1}\,\frac{\frac{1}{3^{2p+1}}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{(2p+1)\,3^{2p-1}4}. \quad (4)$$

Ahora, si queremos calcular ln 2, por ejemplo, con precisión de hasta 0,0000001, es preciso elegir $p$ de modo que sea $R_p < 0{,}0000001$. Esto se puede lograr, eligiendo $p$ de modo que el segundo miembro de la desigualdad (4) sea menor que 0,0000001. Mediante la simple elección hallamos que es suficiente tomar $p = 8$. Pues, con la pre-

cisión de hasta 0,0000001 tenemos:

$$\ln 2 \approx s_8 = 2\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}+\frac{1}{11\cdot 3^{11}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{13\cdot 3^{13}}+\frac{1}{15\cdot 3^{15}}\right]=0,6931471.$$

La respuesta con siete cifras exactas es $\ln 2 = 0,6931471$.

Poniendo en la fórmula (3) $n = 2$, tenemos:

$$\ln 3 = \ln 2 + 2\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}+\ \ldots\right]=1,098612, \text{ etc.}$$

De este modo, podemos obtener los logaritmos **naturales** para números enteros cualesquiera.

Para obtener los logaritmos **decimales** de los números, es preciso usar (véase § 8, capítulo II, tomo I) la correlación:

$$\log N = M \ln N,$$

donde $M = 0,434294$. Entonces, por ejemplo, obtenemos $\ln 2 = 0,6931472$, $\log 2 = 0,30103$.

## § 21. APLICACION DE LAS SERIES AL CALCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS

En los capítulos X y XI (tomo I) hemos indicado que existen las integrales definidas las que, siendo funciones del límite superior, no se expresan en forma definitiva mediante las funciones elementales. A veces tales integrales es cómodo calcularlas con ayuda de series.

Examinemos aquí algunos ejemplos.

1. Supongamos que es necesario calcular la integral

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx.$$

Aquí, la función primitiva de $e^{-x^2}$ no es una función elemental. Para calcular esta integral desarrollemos el integrando en una serie, sustituyendo en el desarrollo de $e^x$ (véase la fórmula (2), § 17) $x$ por $-x^2$:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ \ldots\ +(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ \ldots$$

Integrando ambos miembros de esta igualdad en los límites de 0

a $a$, obtenemos:

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx=\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1!\cdot 3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}-\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\ \dots\right)\Bigg|_0^a=\frac{a}{1}-\frac{a^3}{1!\cdot 3}+\frac{a^5}{2!\cdot 5}-$$
$$-\frac{a^7}{3!\cdot 7}+\dots$$

Esta igualdad permite calcular la integral dada, para toda $a$, con cualquier grado de precisión.

2. Calcular la integral

$$\int_0^a \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$$

Desarrollemos el integrando en una serie: de la igualdad

$$\operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ \dots$$

obtenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ \dots;$$

esta última serie converge para todos los valores de $x$. Integrando término a término, obtenemos:

$$\int_0^a \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx=a-\frac{a^3}{3!\cdot 3}+\frac{a^5}{5!\cdot 5}-\frac{a^7}{7!\cdot 7}+\ \dots$$

Es fácil calcular la suma de la serie con cualquier grado de precisión para toda $a$.

3. Calcular la integral elíptica.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi \qquad (k<1).$$

Desarrollemos el integrando en una serie binomial, poniendo $m=1/2$, $x=-k^2\operatorname{sen}^2\varphi$ (véase la fórmula (5), § 19):

$$\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}=1-\frac{1}{2}k^2\operatorname{sen}^2\varphi-\frac{1}{2}\frac{1}{4}k^4\operatorname{sen}^4\varphi-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}k^6\operatorname{sen}^6\varphi-\ \dots$$

Esta serie converge para todos los valores de $\varphi$ y permite la integración término a término, puesto que es mayorante en todo intervalo.

Por eso

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\, d\varphi = \varphi - \frac{1}{2}k^2 \int_0^{\varphi} \operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{4}k^4 \int_0^{\varphi} \operatorname{sen}^4\varphi\, d\varphi - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}k^6 \int_0^{\varphi} \operatorname{sen}^6\varphi\, d\varphi - \ldots$$

Las integrales del segundo miembro se calculan simplemente. Para $\varphi = \frac{\pi}{2}$ tenemos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2}$$

(véase § 6, capítulo XI, tomo I), y por consiguiente,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \ldots\right].$$

## § 22. APLICACION DE LAS SERIES A LA INTEGRACION DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Si la integración de una ecuación diferencial no se reduce a las cuadraturas, se puede recurrir a los métodos aproximados de integración de la ecuación. Uno de estos métodos consiste en representar la solución de la ecuación en forma de la serie de Taylor; la suma de un número finito de términos de esta serie será aproximadamente igual a la solución particular buscada.

Por ejemplo, sea necesario hallar la solución de una ecuación diferencial de segundo orden:

$$y'' = F(x, y, y'), \tag{1}$$

que satisface a las condiciones iniciales

$$(y)_{x=x_0} = y_0, \qquad (y')_{x=x_0} = y'_0. \tag{2}$$

Supongamos que la solución $y = f(x)$ existe y puede ser representada en la forma de la serie de Taylor (no nos detendremos en

la cuestión en qué condiciones esto tiene lugar):

$$y=f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2}f''(x_0)+\ \dots \qquad (3)$$

Tenemos que hallar $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, . . ., es decir, los valores de las derivadas de la solución particular para $x=x_0$. Esto se puede hacer mediante la ecuación (1) y las condiciones (2).

Efectivamente, de las condiciones (2) se deduce:

$$f(x_0)=y_0, \qquad f'(x_0)=y_0';$$

de la ecuación (1) obtenemos:

$$f''(x_0)=(y'')_{x=x_0}=F(x_0,\ y_0,\ y_0').$$

Derivando ambos miembros de la ecuación (1) respecto a $x$, tenemos:

$$y'''=F'_x(x,\ y,\ y')+F'_y(x,\ y,\ y')\,y'+F'_{y'}(x,\ y,\ y')\,y'' \qquad (4)$$

y poniendo los valores $x=x_0$ en el segundo miembro, hallamos:

$$f'''(x_0)=(y''')_{x=x_0}$$

Derivando la correlación (4) una vez más, hallamos:

$$f^{\mathrm{IV}}(x_0)=(y^{\mathrm{IV}})_{x=x_0},$$

etc.

Los valores hallados de las derivadas ponemos en la igualdad (3). Esta serie representa la solución de la ecuación dada para los valores de $x$ para los cuales la serie converge.

**Ejemplo 1.** Hallar la solución de la ecuación

$$y''=-yx^2,$$

que satisface a las condiciones iniciales

$$(y)_{x=0}=1,\ \ (y')_{x=0}=0.$$

**Solución.** Tenemos:

$$f(0)=y_0=1; \qquad f'(0)=y_0'=0.$$

De la ecuación dada hallamos $(y'')_{x=0}=f''(0)=0$; luego

$$y'''=-y'x^2+2xy, \qquad (y''')_{x=0}f'''(0)=0,$$

$$y^{\mathrm{IV}}=-x^2y''-4xy'-2y, \quad (y^{\mathrm{IV}})_{x=0}=-2$$

y el general, derivando $k$ veces ambos miembros de la ecuación según la fórmula de Leibniz, hallamos (§ 22, capítulo III, tomo I):

$$y^{(k+2)}=-y^{(k)}x^2-2ky^{(k-1)}x-k(k-1)\,y^{(k-2)}.$$

Poniendo $x=0$, tenemos:

$$y_0^{(k+2)}=-k(k-1)\,y_0^{k-2}$$

o, poniendo $k+2=n$:

$$y_0^n=-(n-3)(n-2)\,y_0^{(n-4)}.$$

De ahí:

$$y_0^{IV} = -1\cdot 2,\ y_0^{(8)} = -5\cdot 6\ y_0^{IV} = (-1)^2 (1\cdot 2)(5\cdot 6),$$
$$y_0^{(12)} = -9\cdot 10 y_0^{(8)} = (-1)^3 (1\cdot 2)(5\cdot 6)\cdot(9\cdot 10),$$
$$y_0^{4k} = (-1)^k (1\cdot 2)(5\cdot 6)(9\cdot 10)\ \ldots\ [(4k-3)(4k-2)].$$

Además,

$$y_0^{(5)} = 0,\quad y_0^{(9)} = 0,\ \ldots,\ y_0^{(4k+1)} = 0,$$
$$y_0^{(6)} = 0,\quad y_0^{(10)} = 0,\ \ldots,\ y_0^{(4k+2)} = 0,$$
$$y_0^{(7)} = 0,\quad y_0^{(11)} = 0,\ \ldots,\ y_0^{(4k+3)} = 0.$$

De este modo, solamente las derivadas, cuyo orden es múltiple a 4, no se reducen a cero.

Sustituyendo los valores hallados de las derivadas en la serie de Maclaurin, obtenemos la solución de la ecuación

$$y = 1 - \frac{x^4}{4!} 1\cdot 2 + \frac{x^8}{8!}(1\cdot 2)(5\cdot 6) - \frac{x^{12}}{12!}(1\cdot 2)(5\cdot 6)(9\cdot 10) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^k \frac{x^{4k}}{(4k)!}(1\cdot 2)(5\cdot 6)\ \ldots\ [(4k-3)(4k-2)] + \ldots$$

Mediante el criterio de d'Alembert se puede comprobar que esta serie converge para todos los valores de $x$; por eso, ella es la solución de la ecuación.

Si la ecuación es lineal, es más cómodo buscar los coeficientes del desarrollo de una solución particular por el método de coeficientes indefinidos. Para eso «sustituimos» directamente la serie

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ \ldots\ + a_n x^n + \ \ldots$$

en la ecuación diferencial e igualamos los coeficientes de iguales potencias de $x$ que se hallan en ambos miembros de la ecuación.

**Ejemplo 2.** Hallar la solución de la ecuación

$$y'' = 2xy' + 4y,$$

que satisface a las condiciones iniciales

$$(y)_{x=0} = 0,\quad (y')_{x=0} = 1.$$

**Solución.** Ponemos

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Según las condiciones iniciales hallamos:

$$a_0 = 0,\quad a_1 = 1.$$

Por consiguiente,

$$y = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$
$$y' = 1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots,$$
$$y'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + \ldots + n(n-1)\ a_n x^{n-2} + \ldots$$

Sustituyendo las expresiones escritas en la ecuación dada e igualando los coeficientes de iguales potencias de $x$, obtenemos:

$$2a_2 = 0,\qquad \text{de donde } a_2 = 0;$$
$$3\cdot 2a_3 = 2 + 4,\qquad \text{de donde } a_3 = 1;$$

$$4\cdot 3a_4=4a_2+4a_2, \quad \text{de donde } a_4=0;$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$n(n-1)a_n=(n-2)2a_{n-2}+4a_{n-2}, \quad \text{de donde } a_n=\frac{2a_{n-2}}{n-1}.$$

Por consiguiente,

$$a_5=\frac{2\cdot 1}{4}=\frac{1}{2!}; \quad a_7=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{6}=\frac{1}{3!}; \quad a_9=\frac{1}{4!};$$

$$a_{2k+1}=\frac{2\cdot\frac{1}{(k-1)!}}{2k}=\frac{1}{k!}; \quad a_4=0; \quad a_6=0; \quad a_{2k}=0.$$

Poniendo los coeficientes hallados, obtenemos la solución buscada:

$$y=x+\frac{x^3}{1}+\frac{x^5}{2!}+\frac{x^7}{3!}+\ldots+\frac{x^{2k+1}}{k!}+\ldots$$

La serie obtenida converge para todos los valores de $x$.

Notemos que la solución particular hallada se puede expresar mediante las funciones elementales: sacando $x$ fuera del paréntesis, obtenemos entre paréntesis el desarrollo de la función $e^{x^2}$. Por consiguiente,

$$y=xe^{x^2}.$$

## § 23. ECUACION DE BESSEL

La ecuación diferencial de la forma

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)\,y=0 \qquad (p=\text{const}) \tag{1}$$

se llama *ecuación de Bessel*.

Es conveniente buscar la solución de esta ecuación, igual que las soluciones de algunas otras ecuaciones con coeficientes variables, no en forma de una serie de potencias, sino en forma de un producto de cierta potencia de $x$ por una serie de potencias:

$$y=x^r\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k. \tag{2}$$

El coeficiente $a_0$ podemos considerar distinto de cero a causa de la indeterminación del exponente $r$.

Escribamos la expresión (2) en la forma:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{r+k}$$

y hallemos sus derivadas:

$$y'=\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)\,a_kx^{r+k-1}; \qquad y''=\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)(r+k-1)\,a_kx^{r+k-2}.$$

Pongamos estas expresiones en la ecuación (1):

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1) a_k x^{r+k-2} +$$

$$+ x \sum_{k=0}^{\infty} (r+k) a_k x^{r+k-1} + (x^2 - p^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k} = 0.$$

Igualando a cero los coeficientes de $x$ en la potencia $r$, $r+1$, $r+2$, ..., $r+k$, obtenemos un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ll} [r(r-1)+r-p^2]\, a_0 = 0 \text{ ó } & [r^2-p^2)]\, a_0 = 0, \\ [(r+1)\,r+(r+1)-p^2]\, a_1 = 0 \text{ ó } & [(r+1)^2-p^2]\, a_1 = 0, \\ [(r+2)(r+1)+(r+2)-p^2]\, a_2 + a_0 = 0 \text{ ó } & [(r+2)^2-p^2]\, a_2 + a_0 = 0, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ [(r+k)(r+k-1)+(r+k)-p^2]\, a_k + a_{k-2} = 0 \text{ ó } & [(r+k)^2-p^2]\, a_k + a_{k-2} = 0. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Examinemos la última igualdad:

$$[(r+k)^2 - p^2]\, a_k + a_{k-2} = 0. \qquad (3')$$

Podemos escribirla de modo siguiente:

$$[(r+k-p)(r+k+p)]\, a_k + a_{k-2} = 0.$$

Según la condición $a_0 \neq 0$; por consiguiente,

$$r^2 - p^2 = 0,$$

por eso $r_1 = p$ ó $r_2 = -p$.

Consideremos primeramente la solución correspondiente a $r_1 = p > 0$.

Del sistema de ecuaciones (3) se determinan sucesivamente todos los coeficientes $a_1, a_2, \dots$; $a_0$ queda arbitrario. Ponemos, por ejemplo, $a_0 = 1$. Entonces:

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2p+k)}.$$

Atribuyendo a $k$ diferentes valores, hallemos:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 0, \quad a_3 = 0, \qquad \text{en general, } a_{2m+1} = 0; \\ a_2 = -\dfrac{1}{2(2p+2)}; \quad a_4 = \dfrac{1}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)}; \dots; \\ a_{2\nu} = (-1)^{\nu+1} \dfrac{1}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2\nu(2p+2)(2p+4)\dots(2p+2\nu)}. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Introduciendo los coeficientes hallados en la fórmula (2), obtenemos.

$$y_1 = x^p \left[ 1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^4}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(2p+2)(2p+4)(2p+6)} + \ldots \right]. \quad (5)$$

Todos los coeficientes $a_{2\nu}$ se determinan, puesto que, para todo $k$, el coeficiente de $a_k$ en la ecuación (3)

$$(r_1 + k)^2 - p^2$$

es distinto de cero.

De este modo, $y_1$ es una solución particular de la ecuación (1).

Determinemos ahora en que condiciones, con la segunda raíz $r_2 = -p$, se determinan todos los coeficientes $a_k$. Esto tiene lugar en el caso en que, para cualquier número $k > 0$ entero y par se cumplen las desigualdades

$$(r_2 + k)^2 - p^2 \neq 0 \quad (6)$$

ó

$$r_2 + k \neq p.$$

Pero, $p = r_1$, por consiguiente,

$$r_2 + k \neq r_1.$$

De este modo, en el caso dado la condición (6) es equivalente a la siguiente:

$$r_1 - r_2 \neq k,$$

donde $k$ es un número par positivo entero. Pero,

$$r_1 = p,\ r_2 = -p,$$

por consiguiente,

$$r_1 - r_2 = 2p.$$

Por tanto, si $p$ no es igual a un número entero, se puede escribir la segunda solución particular que se obtiene de la expresión (5) sustituyendo $p$ por $-p$:

$$y_2 = x^{-p} \left[ 1 - \frac{x^2}{2(-2p+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(-2p+2)(-2p+4)} - \right.$$

$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(-2p+2)(-2p+4)(-2p+6)} + \ldots \right]. \quad (5')$$

Las series de potencias (5) y (5′) convergen para todos los valores de $x$, lo que es fácil determinar, aplicando el criterio de d'Alembert

También es evidente, que $y_1$ e $y_2$ son linealmente independientes *).

La solución $y_1$ multiplicada por cierto factor constante, se llama *función de Bessel de primera especie de orden p*, y se designa por el símbolo $J_p$. La solución $y_2$ se designa por el símbolo $J_{-p}$.

De este modo, para $p$ no igual a un número entero, la solución general de la ecuación (1) tiene la forma

$$y = C_1 J_p + C_2 J_{-p}.$$

Así, por ejemplo, para $p = 1/2$ la serie (5) se escribe así:

$$x^{\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 5} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right].$$

Esta solución multiplicada por el factor constante $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ se llama función de Bessel $J_{\frac{1}{2}}$; notemos que la expresión entre paréntesis es la serie cuya suma es igual a $\operatorname{sen} x$. Por consiguiente,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x.$$

Igualmente, aplicando la fórmula (5′), obtenemos:

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

La integral general de la ecuación (1) para $p = 1/2$, es:

$$y = C_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + C_2 J_{-\frac{1}{2}}(x).$$

Sea, ahora, $p$ un número entero que designemos por $n$ ($n \geqslant 0$). La solución (5) en este caso tiene razón y es la primera solución particular de la ecuación (1).

---

*) La independencia lineal de las funciones se comprueba de modo siguiente. Examinemos la correlación

$$\frac{y_2}{y_1} = x^{-2p}\,\frac{1 - \frac{x^2}{2(-2p+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(-2p+2)(-2p+4)} - \ldots}{1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)} - \ldots}.$$

Esta correlación no es constante puesto que, cuando $x \to 0$, ésta tiende al infinito. Por consiguiente, las funciones $y_1$ e $y_2$ son linealmente independientes.

Pero, la solución (5′) no tiene razón, puesto que uno de los factores del denominador en el desarrollo se anula.

Para $p = n$ entero positivo, la función de Bessel $J_n$ se determina por la serie (5) multiplicada por el factor constante $\frac{1}{2^n n!}$ (y cuando $n = 0$, multiplicado por 1):

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!}\left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \ldots\right]$$

ó

$$J_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!\,(n+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu}. \tag{7}$$

Se puede mostrar que en este caso es preciso buscar la segunda solución particular en la forma

$$K_n(x) = J_n(x)\ln x + x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Poniendo esta expresión en la ecuación (1), determinamos los coeficientes $b_k$.

La función $K_n(x)$, con los coeficientes determinados de este modo, multiplicada por cierto factor constante, se llama *función de Bessel de segunda especie de orden n*.

Esta es la segunda solución de la ecuación (1) que, junto con la primera, forma un sistema linealmente independiente.

La integral general toma la forma

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 K_n(x). \tag{8}$$

Notemos que

$$\lim_{x\to 0} K_n(x) = \infty.$$

Por consiguiente, si queremos examinar las soluciones finitas para $x = 0$, entonces, debemos poner $C_2 = 0$ en la fórmula (8).

**Ejemplo.** Hallar la solución de la ecuación de Bessel para $p = 0$

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0,$$

que satisface a las condiciones iniciales: para $x = 0$

$$y = 2, \quad y' = 0.$$

**Solución.** Basándonos en la fórmula (7), hallamos una solución particular:

$$J_0(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{(\nu!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu}=1-\frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\ldots$$

Aplicando esta solución, podemos escribir la solución que satisface a las condiciones iniciales dadas, es decir:

$$y=2J_0(x).$$

**Observación.** Si debemos hallar la integral general de la ecuación dada, tenemos que buscar la segunda solución particular en la forma

$$K_0(x)=J_0\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k.$$

Sin citar todos los cálculos, indiquemos que la segunda solución particular que designemos por $K_0(x)$, tiene la forma:

$$K_0(x)=J_0(x)\ln x+\frac{x^2}{2^2}-\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4\left(1+\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\ldots$$

Esta función, multiplicada por cierto factor constante, se llama *función de Bessel de segunda especie de orden cero.*

## Ejercicios para el capítulo XVI

Escribir unos cuantos primeros términos de la serie según el término general dado:

**1.** $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$. **2.** $u_n=\frac{n^3}{n+1}$. **3.** $u_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$. **4.** $u_n=(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^k}$.

5. $u_n=\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2+1}$.

Estudiar la convergencia de las siguientes series:

6. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$ *Respuesta*: Converge. **7.** $\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{20}}+\frac{1}{\sqrt{30}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{10n}}+\ldots$ *Respuesta*: Diverge. **8.** $2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\ldots+\frac{n+1}{n}+\ldots$ *Respuesta*: Diverge. 9. $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}+\frac{1}{\sqrt[3]{8}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n+6}}+\ldots$ *Respuesta*: Diverge. **10.** $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{3}{4}\right)^9+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}+\ldots$ *Respuesta*: Converge. **11.** $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\ldots+\frac{n}{n^2+1}+\ldots$ *Respuesta*: Diverge.

**12.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{1+n^2}+\ldots$ *Respuesta*: Converge.

Estudiar la convergencia de las series con términos generales dados:

**13.** $u_n=\frac{1}{n^3}$. *Respuesta*: Converge. **14.** $u_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. *Respuesta*: Diverge.

**15.** $u_n=\frac{2}{5n+1}$. *Respuesta*: Diverge. **16.** $u_n=\frac{1+n}{3+n^2}$. *Respuesta*: Diverge. **17.** $u_n=\frac{1}{n^2+2n+3}$. *Respuesta*: Converge. **18.** $u_{n-1}=\frac{1}{n\ln n}$. *Respuesta*: Diverge.

**19.** Demostrar la desigualdad

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}.$$

**20.** ¿Es aplicable o no el teorema de Leibniz a la serie

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\ldots+\frac{n}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\ldots?$$

*Respuesta.* No es aplicable, puesto que los términos de la serie no decrecen monótonamente en valor absoluto. La serie diverge.

Cuántos primeros términos hay que tomar en las series siguientes para que su suma difiera no más que en $1/10^6$ de la suma de la serie correspondiente:

**21.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}+\ldots$ *Respuesta*: $n=20$. **22.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots$ *Respuesta*: $n=10^6$. **23.** $\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n^2}+\ldots$ *Respuesta*: $n=10^3$. **24.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}+\ldots$ *Respuesta*: $n=10$.

Determinar cuáles de las series siguientes convergen absolutamente:

**25.** $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$ *Respuesta*: Converge absolutamente. **26.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots$ *Respuesta*: Converge absolutamente. **27.** $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\ldots(-1)^n\times\frac{1}{\ln n}+\ldots$ *Respuesta*: Converge condicionalmente. **28.** $-1+\frac{1}{\sqrt[5]{2}}-\frac{1}{\sqrt[5]{3}}+\frac{1}{\sqrt[5]{4}}+\ldots(-1)^n\frac{1}{\sqrt[5]{n}}+\ldots$ *Respuesta*: Converge condicionalmente.

Hallar la suma de la serie:

**29.** $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$ *Respuesta*: $1/4$. Para que valores de $x$ convergen las series: **30.** $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots$ *Respuesta*: $-2<x<2$. **31.** $x-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\frac{x^4}{4^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}+\ldots$ *Respuesta*: $-1\leqslant x\leqslant 1$. **32.** $3x+3^4x^4+3^9x^9+\ldots+3^{n^2}x^{n^2}+\ldots$ *Respuesta*: $|x|<\frac{1}{3}$. **33.** $1+\frac{100x}{1\cdot3}+\frac{10\,000x^2}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1\,000\,000x^3}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\ldots$ *Respuesta*: $-\infty<x<\infty$.

**34.** $\operatorname{sen} x+2 \operatorname{sen} \frac{x}{3}+4 \operatorname{sen} \frac{x}{9}+\ldots+2^{n} \operatorname{sen} \frac{x}{3^{n}}+\ldots$ *Respuesta*: $-\infty<x<\infty$. **35.** $\frac{x}{1+\sqrt{1}}+\frac{x^{2}}{2+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{x^{n}}{n+\sqrt{n}}+\ldots$ *Respuesta*: $-1 \leqslant x<1$. **36.** $x+\frac{2^{k}}{2!} x^{2}+\frac{3^{k}}{3!} x^{3}+\ldots+\frac{n^{k}}{n!} x^{n}+\ldots+$ *Respuesta*: $-\infty<x<\infty$. **37.** $x+\frac{2!}{2^{2}} x^{2}+\frac{3!}{3^{3}} x^{3}+\ldots+\frac{n!}{n^{n}} x^{n}+\ldots$ *Respuesta*: $-e<x<e$. **38.** $x+\frac{2^{2}}{4!} x^{2}+\frac{(1 \cdot 2 \cdot 3)^{2}}{6!} x^{3}+\ldots+\frac{(n!)^{2}}{(2n)!} x^{n}+\ldots$ *Respuesta*: $-4<x<4$. **39.** Hallar la suma de la serie $x+2x^{2}+\ldots+nx^{n}+\ldots$ $(|x|<1)$.

**Indicación.** Escribir la serie en la forma

$$
\begin{array}{r}
x+x^{2}+x^{3}+x^{4}+\ldots \\
x^{2}+x^{3}+x^{4}+\ldots \\
x^{3}+x^{4}+\ldots \\
x^{4}+\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

*Respuesta*: $\frac{x}{(1-x)^{2}}$.

Determinar cuáles de las series siguientes son mayorantes en los segmentos indicados;

**40.** $1+\frac{x}{1^{2}}+\frac{x^{2}}{2^{2}}+\ldots+\frac{x^{n}}{n^{2}}+\ldots$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. *Respuesta*: Mayorante. **41.** $1+\frac{x}{1}+\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}+\ldots+\frac{x^{n}}{n}+\ldots$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. *Respuesta*: No mayorante. **42.** $\frac{\operatorname{sen} x}{1^{2}}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{2^{2}}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3^{2}}+\ldots+\frac{\operatorname{sen} nx}{n^{2}}+\ldots$ $[0, 2\pi]$. *Respuesta*: Mayorante.

**Desarrollo de las funciones en series**

**43.** Desarrollar $\frac{1}{10+x}$ según las potencias de $x$ y determinar el intervalo de convergencia. *Respuesta*: Converge para $-10<x<10$. **44.** Desarrollar $\cos x$ según las potencias de $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. *Respuesta*: $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}} \times \left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2}+\frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{3}+\ldots$ **45.** Desarrollar $e^{-x}$ según las potencias de $x$. *Respuesta*: $1-x+\frac{x^{2}}{2!}-\frac{x^{3}}{3!}+\ldots$ **46.** Desarrollar $e^{x}$ según las potencias de $(x-2)$. *Respuesta*: $e^{2}+e^{2}(x-2)+\frac{e^{2}}{2!}(x-2)^{2}+\frac{e^{2}}{3!}(x-2)^{3}+\ldots$ **47.** Desarrollar $x^{3}-2x^{2}+5x-7$ según las potencias de $(x-1)$. *Respuesta*: $-3+4(x-1)+(x-1)^{2}+(x-1)^{3}$.

**48.** Desarrollar el polinomio $x^{10}+2x^{9}-3x^{7}-6x^{6}+3x^{4}+6x^{3}-x-2$ en la serie de Taylor según las potencias de $x-1$; convencerse de que este polinomio tiene el número 1 como raíz triple. *Respuesta*:

$$f(x)=81(x-1)^3+270(x-1)^4+342(x-1)^5+330(x-1)^6+186(x-1)^7+ +63(x-1)^8+12(x-1)^9+(x-1)^{10}.$$

**49.** Desarrollar $\cos(x+a)$ según las potencias de $x$. *Respuesta*:

$$\cos a - x\operatorname{sen} a - \frac{x^2}{2!}\cos a + \frac{x^3}{3!}\operatorname{sen} a + \frac{x^4}{4!}\cos a - \ldots$$

**50.** Desarrollar $\ln x$ según las potencias de $(x-1)$. *Respuesta*:

$$(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\ldots$$

**51.** Desarrollar $e^x$ en la serie según las potencias de $(x+2)$. *Respuesta*:

$$e^{-2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right].$$

**52.** Desarrollar $\cos^2 x$ en la serie según las potencias de $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; *Respuesta*:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}\quad(|x|<\infty).$$

**53.** Desarrollar $\frac{1}{x^2}$ en la serie según las potencias de $(x+1)$. *Respuesta*:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n\quad(-2<x<0).$$

**54.** Desarrollar $\operatorname{tg} x$ en la serie según las potencias de $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. *Respuesta*:

$$1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\ldots$$

Escribir los primeros cuatro términos del desarrollo en la serie según las potencias de $x$ de las funciones:

**55.** $\operatorname{tg} x$. *Respuesta*: $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$ **56.** $e^{\cos x}$. *Respuesta*: $e\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{4x^4}{4!}-\frac{31x^6}{720}-\ldots\right)$ **57.** $e^{\operatorname{arctg} x}$. *Respuesta*: $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{7x^4}{24}+\ldots$ **58.** $\ln(1+e^x)$. *Respuesta*: $\ln 2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{7x^4}{384}+\ldots$ **59.** $e^{\operatorname{sen} x}$. *Respuesta*: $1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\ldots$ **60.** $(1+x)^x$. *Respuesta*: $1+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{5}{6}x^4-\ldots$ **61.** $sc\, x$. *Respuesta*: $1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\ldots$ **62.** $\ln\cos x$. *Respuesta*: $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}-\ldots$ **63.** Desarrollar $\operatorname{sen} kx$ según las potencias de $x$. *Respuesta*: $kx-\frac{(kx)^3}{3!}+\frac{(kx)^5}{5!}-\frac{(kx)^7}{7!}+\ldots$ **64.** Desarrollar $\operatorname{sen}^2 x$

según las potencias de $x$ y determinar el intervalo de convergencia. *Respuesta*: $\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+\frac{2^5x^6}{6!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$ La serie converge para todos los valores de $x$. **65.** Desarrollar $\frac{1}{1+x^2}$ en la serie según las potencias de $x$. *Respuesta*: $1-x^2+x^4-x^6+\ldots$ **66.** Desarrollar $\operatorname{arctg} x$ en la serie según las potencias de $x$. **Indicación.** Aprovechar la fórmula $\operatorname{arctg} x=\int\limits_0^x \frac{dx}{1+x^2}$.

*Respuesta*: $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$. **67.** Desarrollar $\frac{1}{(1+x)^2}$ en la serie según las potencias de $x$. *Respuesta*: $1-2x+3x^2-4x^3+\ldots$ $(-1<x<1)$.

Aprovechando las fórmulas del desarrollo en serie de potencias de las funciones $e^x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$ y aplicando diferentes procedimientos, desarrollar en series de potencias las funciones y determinar los intervalos de convergencia:

**68.** $\operatorname{senh} x$. *Respuesta*: $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$. **69.** $\cosh x$. *Respuesta*: $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$. **70.** $\cos^2 x$. *Respuesta*: $1+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$ **71.** $(1+x)\ln(1+x)$. *Respuesta*: $x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(n-1)n}$ $(|x|\leqslant 1)$. **72.** $(1+x)e^{-x}$. *Respuesta*: $1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}x^n$ $(-\infty<x<\infty)$ **73.** $\frac{1}{4-x^4}$. *Respuesta*: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{4^{n+1}}$ $(|x|<\sqrt{2})$. **74.** $\frac{e^x-1}{x}$. *Respuesta*: $1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$. **75.** $\frac{1}{(1-x)^2}$ *Respuesta*: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ $(|x|<1)$. **76.** $e^x\operatorname{sen} x$. *Respuesta*: $x+x^2+\frac{2x^3}{3!}-\frac{4x^5}{5!}+\ldots+\sqrt{2^n}\times\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\frac{x^n}{n!}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$. **77.** $x+\sqrt{1+x^2}$. *Respuesta*: $x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

**78.** $\int\limits_0^x\frac{\ln(1+x)}{x}dx$. *Respuesta*: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$ $(|x|\leqslant 1)$.

79. $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$. *Respuesta:* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

80. $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$. *Respuesta:* $C+\ln|x|+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)(2n)!}$

$(-\infty < x < 0$ y $0 < x < \infty)$. 81. $\int_0^x \frac{dx}{1-x^9}$. *Respuesta:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{9n-8}}{9n-8}$.

82. Demostrar las igualdades:

$$\operatorname{sen}(a+x)=\operatorname{sen} a\cos x+\cos a\operatorname{sen} x,$$

$$\cos(a+x)=\cos a\cos x-\operatorname{sen} a\operatorname{sen} x,$$

desarrollando los primeros miembros según las potencias de $x$.

Aprovechando las series correspondientes, calcular:

83. cos 10° con precisión de hasta 0,0001. *Respuesta*: 0,9848.
84. sen 1° con precisión de hasta 0,0001. *Respuesta*: 0,0175.
85. sen 18° con precisión de hasta 0,001. *Respuesta*: 0,3090.
86. sen $\frac{\pi}{4}$ con precisión de hasta 0,0001. *Respuesta*: 0,7071.
87. arctg 1/5 con precisión de hasta 0,0001. *Respuesta* 0,1973.
88. ln 5 con precisión de hasta 0,001. *Respuesta*: 1,609.
89. $\log_{10} 5$ con precisión de hasta 0,001. *Respuesta*: 0,699.
90. arcsen 1 con precisión de hasta 0,0001. *Respuesta*: 1,5708.
91. $\sqrt{e}$ con precisión de hasta 0,0001. *Respuesta*: 1,6487.
92. log $e$ con precisión de hasta 0,00001. *Respuesta*: 0,43429.
93. cos 1 con precisión de hasta 0,00001. *Respuesta*: 0,5403.

Desarrollando en la serie de Maclaurin la función $f(x)=\sqrt[n]{a^n+x}$, calcular con precisión de hasta 0,001: **94.** $\sqrt[3]{30}$. *Respuesta*: 3,107. **95.** $\sqrt{70}$. *Respuesta*: 4,121. **96.** $\sqrt[3]{500}$. *Respuesta*: 7,937. **97.** $\sqrt[5]{250}$. *Respuesta*: 3,017. **98.** $\sqrt{84}$. *Respuesta*: 9,165. **99.** $\sqrt[3]{2}$. *Respuesta*: 1,2598.

Desarrollando el integrando en la serie, calcular las integrales:

100. $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ con precisión de hasta $10^{-5}$. *Respuesta*: 0,94608.

101. $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ con precisión de hasta 0,0001. *Respuesta*: 0,7468.

102. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ con precisión de hasta 0,0001. *Respuesta*: 0,1571.

103. $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{x}}\,dx$ con precisión de hasta 0,01. *Respuesta*: 0,81.

**104.** $\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$ con precisión de hasta 0,001. *Respuesta*: 0,487.

**105.** $\int_0^1 \cos \sqrt{x}\, dx$ con precisión de hasta 0,001. *Respuesta*: 0,764.

**106.** $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1+\sqrt{x})\, dx$ con precisión de hasta 0,001. *Respuesta*: 0,071.

**107.** $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{4}} dx$ con precisión de hasta 0,0001. *Respuesta*: 0,9226.

**108.** $\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x}} dx$ · con precisión de hasta 0,0001. *Respuesta*: 0,0214.

**109.** $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$ con precisión de hasta 0,001. *Respuesta*: 0,494.

**110.** $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$. *Respuesta*: $\frac{\pi^2}{12}$.

**Indicación.** Al resolver este ejemplo y los dos siguientes es útil tener en cuenta las igualdades:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

que serán obtenidas en § 2, capítulo XVII.

**111.** $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx$. *Respuesta*: $\frac{\pi^2}{6}$. **112.** $\int_0^1 \ln \frac{1+x}{1-x} \frac{dx}{x}$. *Respuesta*: $\frac{\pi^2}{4}$.

**Integración de las ecuaciones diferenciales por medio de las series**

**113.** Hallar la solución de la ecuación $y''=xy$ que satisface a las condiciones iniciales: para $x=0$ e $y=1$, $y'=0$.

**Indicación:** Buscar la solución en la forma de una serie.

*Respuesta*: $1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\ldots+\frac{x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\ldots(3k-1)\,3k}+\ldots$

**114.** Hallar la solución de la ecuación $y''+xy'+y=0$ que satisface a las ondiciones iniciales: para $x=0$ e $y=0$, $y'=1$.

*Respuesta*: $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{1\cdot3\cdot5}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}$.

**115.** Hallar la solución general de la ecuación

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0.$$

**Indicación.** Buscar la solución en la forma

$$y=x^p(A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots).$$

*Respuesta*:

$$C_1x^{-\frac{1}{2}}\left[1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\right]+C_2x^{-\frac{1}{2}}\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right]=$$

$$=C_1\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}+C_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

**116.** Hallar la solución de la ecuación $xy''+y'+xy=0$ que satisface a las condiciones iniciales: para $x=0$, $y=1$, $y'=0$.

*Respuesta*: $1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{(1\cdot2)^2\,2^4}-\frac{x^6}{(1\cdot2\cdot3)^2\,2^6}+\ldots(-1)^k\frac{x^{2k}}{(k!)^2\,2^{2k}}+\ldots$

**Observación.** Las dos últimas ecuaciones diferenciales son los casos particulares de la ecuación de Bessel

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)\,y=0$$

para $n=1/2$ y $n=0$.

**117.** Hallar la solución general de la ecuación $4xy''+2y'+y=0$.

**Indicación.** Buscar la solución en forma de una serie

$$x^p(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots).$$

*Respuesta*: $C_1\cos\sqrt{x}+C_2\operatorname{sen}\sqrt{x}$.

**118.** Hallar la solución de la ecuación $(1-x^2)\,y''-xy'=0$, que satisface a las condiciones iniciales: para $x=0$ e $y=0$, $y'=1$.

*Respuesta*: $x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7}+\ldots$

**119.** Hallar la solución de la ecuación $(1+x^2)\,y''+2xy'=0$, que satisface a las condiciones iniciales: para $x=0$ e $y=0$, $y'=1$.

*Respuesta*: $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$

**120.** Hallar la solución de la ecuación $y''=xyy'$, que satisface a las condiciones iniciales: para $x=0$ e $y=1$, $y'=1$.

*Respuesta*: $1+x+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\frac{3x^5}{5!}+\ldots$

**121.** Hallar la solución de la ecuación $(1-x)\,y'=1+x-y$, que satisface a las condiciones iniciales: para $x=0$ e $y=0$, indicando el intervalo de convergencia de la serie obtenida.

*Respuesta*: $x+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^3}{2\cdot3}+\frac{x^4}{3\cdot4}+\ldots\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$.

**122.** Hallar la solución de la ecuación $xy''+y=0$, que satisface a las condiciones iniciales: para $x=0$ e $y=0$, $y'=1$, indicando el intervalo de convergencia.

*Respuesta*: $x-\frac{x^2}{(1!)^2\,2}+\frac{x^3}{(2!)^3\,3}-\frac{x^4}{(3!)^4\,4}+\ldots\ (-\infty<x<\infty)$.

**123.** Hallar la solución de la ecuación $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$, que satisface a las condiciones iniciales: para $x=0$ e $y=1$, $y'=1$.

*Respuesta*: $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

**124.** Hallar la solución de la ecuación $y''+\frac{1}{x}y'+y=0$, que satisface a las condiciones iniciales: para $x=0$ e $y=1$, $y'=0$, indicando el intervalo de convergencia de la serie obtenida.

*Respuesta*: $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{2^2.4^2}-\frac{x^6}{2^2.4^2.6^2}+\ldots\ (|x|<\infty)$.

Hallar los primeros tres términos del desarrollo en una serie de potencias de las soluciones de las ecuaciones diferenciales siguientes cuando se verifican las condiciones iniciales indicadas:

**125.** $y'=x^2+y^2$, para $x=0$ e $y=1$. *Respuesta*: $1+x+x^2+\frac{4x^3}{3}+\ldots$

**126.** $y''=e^y+x$, para $x=0$ e $y=1$, $y'=0$. *Respuesta*: $1+\frac{ex^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots$

**127.** $y'=\operatorname{sen} y-\operatorname{sen} x$; para $x=0$ e $y=0$. *Respuesta*: $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\ldots$

Hallar unos cuantos términos del desarrollo en una serie de potencias de las soluciones de las ecuaciones diferenciales cuando se verifican las condiciones iniciales indicadas:

**128.** $y''=yy'-x^2$; para $x=0$ e $y=0$, $y'=0$.

*Respuesta*: $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}+\frac{8x^4}{4!}+\frac{14x^5}{5!}+\ldots$

**129.** $y'=y^2+x^3$; para $x=0$ e $y=1/2$.

*Respuesta*: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{9}{32}x^4+\ldots$

**130.** $y'=x^2-y^2$; para $x=0$ e $y=0$.

*Respuesta*: $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7\cdot 9}x^7+\frac{2}{7\cdot 11\cdot 27}x^{11}-\ldots$

**131.** $y'=x^2y^2-1$; para $x=0$ e $y=1$.

*Respuesta*: $1-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{5}-\ldots$

**132.** $y'=e^y+xy$; para $x=0$ e $y=0$.

*Respuesta*: $x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{11x^4}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$

CAPITULO XVII

# SERIES DE FOURIER

## § 1. DEFINICION. PLANTEO DEL PROBLEMA

La serie de funciones de la forma

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots,$$

o, de modo más conciso, la serie de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx), \tag{1}$$

se llama *serie trigonométrica*. Los números constantes $a_0$, $a_n$ y $b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ se llaman *coeficientes de la serie trigonométrica*.

Si la serie (1) converge, su suma es una función periódica $f(x)$ de período $2\pi$, puesto que sen $nx$ y cos $nx$ son funciones periódicas de período $2\pi$.

De este modo,

$$f(x) = f(x + 2\pi).$$

Planteemos el problema siguiente.

Sea dada una función periódica $f(x)$ de período $2\pi$. **¿En qué condiciones se puede hallar para $f(x)$ la serie trigonométrica que converge hacia la función dada?**

En el presente capítulo resolvemos este problema.

**Determinación de los coeficientes de la serie mediante las fórmulas de Fourier.**

Supongamos que una función periódica $f(x)$ de período $2\pi$ es tal que se puede representarla como serie trigonométrica que converge hacia la función dada en el intervalo $(-\pi, \pi)$, es decir, es la suma de esta serie:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx). \tag{2}$$

Supongamos que la integral de la función de primer miembro de esta igualdad, es igual a la suma de las integrales de los términos de la serie (2). Esto tendrá lugar, por ejemplo, si suponemos que la serie numérica formada de los coeficientes de la serie trigonométrica dada converge absolutamente, es decir, converge la serie numérica positiva siguiente:

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| + |a_1| + |b_1| + |a_2| + |b_2| + \ldots + |a_n| + |b_n| + \ldots \qquad (3)$$

Entonces, la serie (1) es mayorante y, por consiguiente, podemos integrarla término a término en el intervalo de $-\pi$ a $\pi$. Aprovechamos esto para calcular el coeficiente $a_0$.

Integramos ambos miembros de la igualdad (2) dentro de los límites de $-\pi$ a $+\pi$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen} nx\,dx\right).$$

Calculemos por separado cada integral del segundo miembro:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx = \pi a_0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\,dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \left.\frac{a_n \operatorname{sen} nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen} nx\,dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx = b_n \left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Por consiguiente,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0,$$

de donde

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \qquad (4)$$

Para calcular los demás coeficientes de la serie necesitamos ciertas integrales definidas las que examinaremos preliminarmente.

Si $n$ y $k$ son números enteros, se verifican las siguientes igualdades: si $n \neq k$, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\,dx = 0; \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} kx\,dx = 0; \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} kx\,dx = 0; \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

pero, si $n = k$, entonces:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\,dx = \pi; \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx \cos kx\,dx = 0; \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 kx\,dx = \pi. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Calculemos, por ejemplo, la primera integral del grupo (I). Puesto que

$$\cos nx \cos kx = \frac{1}{2}\left[\cos(n+k)x + \cos(n-k)x\right],$$

entonces:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+k)x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k)x\,dx = 0.$$

De modo semejante es posible obtener también las demás fórmulas (I) *). Las integrales del grupo (II) se calculan directamente (véase capítulo X, tomo I).

Ahora podemos calcular los coeficientes $a_k$ y $b_k$ de la serie (2).

Para hallar el coeficiente $a_k$ cuando $k \neq 0$ tiene cierto valor determinado, multipliquemos ambos miembros de la igualdad (2)

*) Mediante las fórmulas

$$\cos nx \operatorname{sen} kx = {}^1/_2\left[\operatorname{sen}(n+k)x - \operatorname{sen}(n-k)x\right],$$
$$\operatorname{sen} nx \operatorname{sen} kx = {}^1/_2\left[-\cos(n+k)x + \cos(n-k)x\right].$$

por $\cos kx$:

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \cos kx + b_n \cos nx \cos kx). \quad (2')$$

La serie del segundo miembro de la igualdad es mayorante, puesto que sus términos no superan en valor absoluto a los términos de la serie convergente positiva (3). Por eso, podemos integrarla término a término en cualquier segmento.

Integremos la igualdad (2') dentro de los límites de $-\pi$ a $\pi$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} nx\cos kx\,dx\right).$$

Tomando en consideración las fórmulas (II) y (I), notamos que todas las integrales del segundo miembro se anulan, a excepción de la integral con coeficiente $a_k$.

Por consiguiente,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx = a_k\pi,$$

de donde

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx. \quad (5)$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad (2) por $\operatorname{sen} kx$ e integrando de nuevo de $-\pi$ a $\pi$, hallemos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx = b_k\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^2 kx\,dx = b_k\pi,$$

de donde:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx. \quad (6)$$

Los coeficientes determinados por las fórmulas (4), (5) y (6), se llaman *coeficientes de Fourier* de la función $f(x)$, y la serie trigonométrica (1) formada con tales coeficientes se llama *serie de Fourier* de la función $f(x)$.

Ahora regresemos al problema planteado al principio de este párrafo: ¿cuáles propiedades ha de poseer la función $f(x)$ para que su serie de Fourier converja y para que la suma de la serie de Fourier formada sea igual a los valores de la función dada en los puntos correspondientes?

Formulemos el teorema que ofrece condiciones suficientes para representar la función $f(x)$ por la serie de Fourier.

**Definición.** Una función $f(x)$ se llama *monótona por trozos* en el segmento $[a, b]$, si este último se puede dividir por los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ en un número finito de intervalos $(a, x_1)$ $(x_1, x_2)$. . . . . . $(x_{n-1} b)$ de modo que la función sea monótona en cada uno de los intervalos, es decir, que ella sea o bien no creciente, o bien no decreciente.

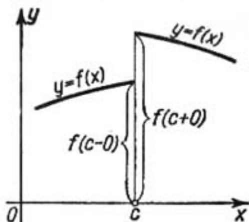


*Fig. 356*

De la definición se deduce, que si la función $f(x)$ es monótona por trozos y acotada en el segmento $[a, b]$, entonces puede tener sólo puntos de discontinuidad de primera especie. Efectivamente, si $x = c$ es un punto de discontinuidad de la función $f(x)$, entonces, en virtud de la monotonía de la función existen los límites:

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = f(c-0), \qquad \lim_{x \to c+0} f(x) = f(c+0),$$

es decir, el punto $c$ es punto de discontinuidad de primera especie (fig. 356).

Formulemos ahora el siguiente teorema.

Teorema. *Si la función periódica $f(x)$ de período $2\pi$ es monótona por trozos y acotada en el segmento $(-\pi, \pi)$, entonces la serie de Fourier, formada para esta función, converge en todos los puntos. La suma de la serie obtenida $s(x)$ es igual al valor de la función $f(x)$ en los puntos de continuidad de la función. En los puntos de discontinuidad de la función $f(x)$ la suma de la serie es igual al medio aritmético de los límites de la función $f(x)$ a la derecha y a la izquierda, es decir, si $x = c$ es un punto de discontinuidad de la función $f(x)$, entonces tenemos:*

$$s(x)_{x=c} = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}.$$

De este teorema se deduce que la clase de las funciones que pueden ser representadas por las series de Fourier, es bastante amplia. Por eso las series de Fourier han encontrado una amplia aplicación en diferentes ramas de las matemáticas. Con particular éxito las series de Fourier se emplean en la física matemática y en

sus aplicaciones a los problemas concretos de mecánica y física (véase el capítulo XVIII).

Demos el teorema citado sin demostración. En los párrafos 8-10 demostremos otro criterio suficiente para que una función sea desarrollable en la serie de Fourier. Este criterio se refiere, en cierto sentido, a la clase más estrecha de funciones.

## § 2. EJEMPLOS DE DESARROLLO DE LAS FUNCIONES EN SERIES DE FOURIER

Demos los ejemplos de desarrollo de las funciones en series de Fourier.

**Ejemplo 1.** Sea una función periódica $f(x)$ de período $2\pi$ definida de modo siguiente:

$$f(x)=x, \quad -\pi < x \leqslant \pi.$$

Es una función monótona por trozos y acotada (fig. 357). Por consiguiente, permite el desarrollo en la serie de Fourier.

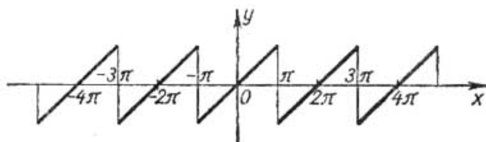



*Fig. 357*

Según la fórmula (4) § 1, hallamos:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

Aplicando la fórmula (5) § 1 e integrando por partes, obtenemos:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[x\frac{\operatorname{sen} kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} kx\,dx\right]=0.$$

Según la fórmula (6) § 1, hallamos:

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\operatorname{sen} kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx\right]=(-1)^{k+1}\frac{2}{k}.$$

De este modo, obtenemos la serie

$$f(x)=2\left[\frac{\operatorname{sen} x}{1}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}-\ldots(-1)^{k+1}\frac{\operatorname{sen} kx}{k}+\ldots\right].$$

Esta igualdad tiene lugar en todos los puntos, excepto los de discontinuidad. En cada punto de discontinuidad la suma de la serie es igual al medio aritmético de los límites de la función a la derecha y a la izquierda, es decir, es cero.

**Ejemplo 2.** Sea una función periódica $f(x)$ de período $2\pi$ definida de modo siguiente:

$$f(x) = -x \text{ para } -\pi \leqslant x \leqslant 0,$$
$$f(x) = x \text{ para } 0 < x \leqslant \pi$$

(es decir, $f(x) = |x|$) (fig. 358). Esta función es también monótona por trozos y acotada en el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

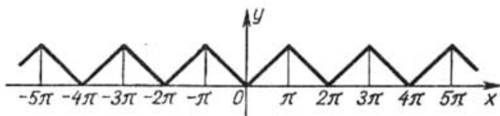



*Fig. 358*

Determinemos sus coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right] = \pi,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos kx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cos kx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x \operatorname{sen} kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\operatorname{sen} kx\,dx + \frac{x\operatorname{sen} kx}{k}\Big|_{0}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen} kx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi k}\left[-\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi - 1) = \begin{cases} 0 & \text{para } k \text{ par,} \\ -\dfrac{4}{\pi k^2} & \text{para } k \text{ impar;} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\operatorname{sen} kx\,dx + \int_{0}^{\pi} x \operatorname{sen} kx\,dx\right] = 0.$$

De este modo, obtenemos la serie

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots + \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2} + \ldots\right].$$

Esta serie converge en todos los puntos y su suma es igual a la función dada.

**Ejemplo 3.** Sea una función periódica $f(x)$ de período $2\pi$ definida de modo siguiente:

$$f(x) = -1 \quad \text{para} \quad -\pi < x < 0,$$
$$f(x) = 1 \quad \text{para} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

Esta función (fig. 359) es monótona por trozos y acotada en el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

Calculemos sus coeficientes de Fourier:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{0}(-1)\,dx+\int_{0}^{\pi}dx\right]=0;$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos kx\,dx+\int_{0}^{\pi}\cos kx\,dx\right]=-1\cdot\frac{\operatorname{sen} kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{\operatorname{sen} kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}=0;$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\operatorname{sen} kx\,dx+\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen} kx\,dx\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi k}\left[1-\cos \pi k\right]=\begin{cases}0 & \text{para } k \text{ par,}\\ \dfrac{4}{\pi k} & \text{para } k \text{ impar.}\end{cases}$$

Por consiguiente, la serie de Fourier de la función examinada tiene la forma

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{1}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}+\frac{\operatorname{sen} 5x}{5}+\ldots+\frac{\operatorname{sen}(2p+1)x}{2p+1}+\ldots\right].$$

Esta igualdad es válida en todos los puntos, excepto los de discontinuidad

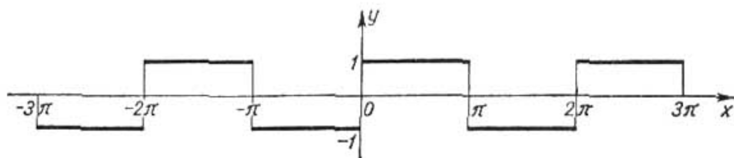



*Fig. 359*

En la fig. 360 se indica claramente, como las sumas parciales $s_n$ de la serie representan cada vez más exactamente la función $f(x)$, al aumentar $n$.

**Ejemplo 4.** Sea una función periódica $f(x)$ de período $2\pi$ definida de modo siguiente:

$$f(x)=x^2,\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi \text{ (fig. 361).}$$

Calculemos sus coeficientes de Fourier:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2\operatorname{sen} kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi}x\operatorname{sen} kx\,dx\right]=$$

$$= -\frac{2}{\pi k}\left[-\frac{x\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx\right] = \frac{4}{\pi k^2}[\pi\cos k\pi] =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{k^2} \text{ para } k \text{ par}, \\ -\dfrac{4}{k^2} \text{ para } k \text{ impar}; \end{cases}$$

*Fig. 360*

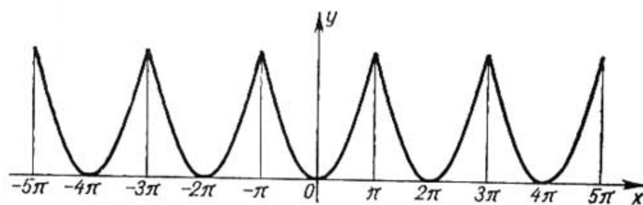



*Fig. 361*

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2 \operatorname{sen} kx\,dx=+\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos kx\,dx\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi k}\left[\frac{x \operatorname{sen} kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} kx\,dx\right]=0.$$

Pues, la serie de Fourier de la función dada tiene la forma

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\dots\right).$$

Puesto que la función es monótona por trozos, acotada y continua, esta igualdad se cumple en todos los puntos.

Poniendo en la igualdad obtenida $x=\pi$, obtenemos:

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

**Ejemplo 5.** Sea una función periódica $f(x)$ de período $2\pi$ definida de modo siguiente:

$$f(x)=0 \quad \text{para} \quad -\pi\leqslant x\leqslant 0,$$
$$f(x)=x \quad \text{para} \quad 0<x\leqslant\pi \text{ (fig. 362).}$$

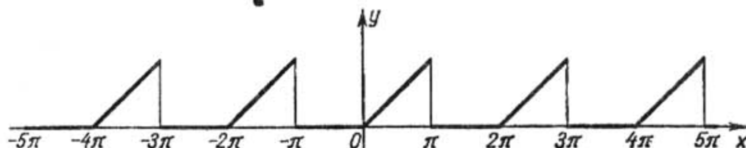



*Fig. 362*

Determinemos los coeficientes de Fourier:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}0\cdot dx+\int_{0}^{\pi}x\,dx\right]=\frac{1}{\pi}\,\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi}{2};$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x \operatorname{sen} kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen} kx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi k}\,\frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}=\begin{cases}-\dfrac{2}{\pi k^2} & \text{para } k \text{ impar},\\ 0 & \text{para } k \text{ par};\end{cases}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x \operatorname{sen} kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}+\frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\cos kx\,dx\right]=$$

$$=-\frac{\pi}{\pi k}\cos k\pi=\begin{cases}\dfrac{1}{k} & \text{para } k \text{ impar},\\ -\dfrac{1}{k} & \text{para } k \text{ par}.\end{cases}$$

De este modo, la serie de Fourier toma la forma:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)+\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}-\ldots\right).$$

En los puntos de discontinuidad de la función $f(x)$ la suma de la serie es igual al medio aritmético de los límites de la función a la derecha y a la izquierda $\left(\text{o sea, en el caso dado, al número } \frac{\pi}{2}\right)$.

Poniendo en la igualdad obtenida $x=0$, tenemos:

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

## § 3. UNA OBSERVACION SOBRE EL DESARROLLO DE LA FUNCION PERIODICA EN LA SERIE DE FOURIER

Indiquemos la siguiente propiedad de una función $\psi(x)$ periódica de período $2\pi$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\,dx=\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi}\psi(x)\,dx,$$

cualquiera que sea el número $\lambda$.

En efecto, como

$$\psi(\xi-2\pi)=\psi(\xi),$$

entonces, poniendo $x=\xi-2\pi$, podemos escribir, para cualesquiera $c$ y $d$:

$$\int_{c}^{d}\psi(x)\,dx=\int_{c+2\pi}^{d+2\pi}\psi(\xi-2\pi)\,d\xi=\int_{c+2\pi}^{d+2\pi}\psi(\xi)\,d\xi=\int_{c+2\pi}^{d+2\pi}\psi(x)\,dx.$$

En particular, poniendo $c=-\pi$, $d=\lambda$, obtenemos:

$$\int_{-\pi}^{\lambda}\psi(x)\,dx=\int_{\pi}^{\lambda+2\pi}\psi(x)\,dx,$$

por eso

$$\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi}\psi(x)\,dx=\int_{\lambda}^{-\pi}\psi(x)\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\,dx+\int_{\pi}^{\lambda+2\pi}\psi(x)\,dx=$$

$$=\int_{\lambda}^{-\pi}\psi(x)\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\,dx+\int_{-\pi}^{\lambda}\psi(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\,dx.$$

La propiedad indicada significa que la *integral de una función periódica $\psi(x)$ en un segmento arbitrario de longitud igual al período, siempre tiene un mismo valor*. Es fácil ilustrarlo geométricamente: las áreas rayadas en la fig. 363, son iguales.

De la propiedad demostrada se deduce que, al calcular los coeficientes de Fourier, podemos sustituir el intervalo de integración

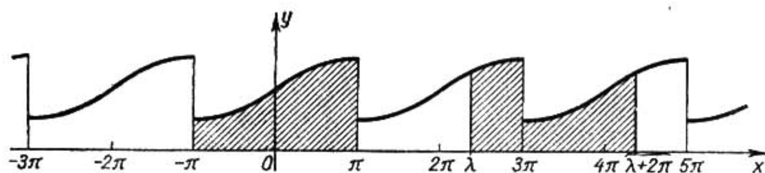



*Fig. 363*

$(-\pi, \pi)$ por otro $(\lambda, \lambda + 2\pi)$, es decir, podemos poner:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

donde $\lambda$ es un número arbitrario.

Esto se deduce de que la función $f(x)$ es, según la hipótesis, periódica de período $2\pi$; por consiguiente, las funciones $f(x)\cos nx$ y $f(x)\,\mathrm{sen}\,nx$ son también las funciones periódicas de período $2\pi$. Mostremos con un ejemplo cómo en algunos casos la propiedad demostrada simplifica el proceso de cálculo de los coeficientes.

**Ejemplo.** Supongamos que se necesita desarrollar en la serie de Fourier la función $f(x)$ de período $2\pi$, que, en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, está dada por la igualdad

$$f(x) = x.$$

La gráfica de la función $f(x)$ se representa en la fig. 364. Esta función está dada en el segmento $[-\pi, \pi]$, por dos fórmulas: $f(x) = x + 2\pi$ en el seg-

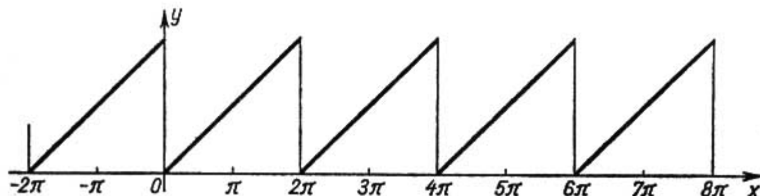



*Fig. 364*

mento $[-\pi, 0]$, y $f(x) = x$, en el segmento $[0, \pi]$. Al mismo tiempo en el segmento $[0, 2\pi]$ esta función está dada de modo más simple por una fór-

mula $f(x) = x$. Por eso, para desarrollar esta función en la serie de Fourier es más provechoso utilizar las fórmulas (1), poniendo $\lambda = 0$;

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x\,dx = 2\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^{2\pi} = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\,dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \operatorname{sen} nx\,dx = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} \right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{n}.$$

Por consiguiente,

$$f(x) = \pi - 2 \operatorname{sen} x - \frac{2}{2} \operatorname{sen} 2x - \frac{2}{3} \operatorname{sen} 3x - \frac{2}{4} \operatorname{sen} 4x - \frac{2}{5} \operatorname{sen} 5x - \dots$$

Esta serie representa la función dada en todos los puntos, excepto en los de discontinuidad (es decir, excepto los puntos $x = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$). En estos puntos la suma de la serie es igual a la mitad de la suma de valores límites de la función $f(x)$ a la derecha y a la izquierda (es decir, en el caso dado, al número $\pi$).

## § 4. SERIES DE FOURIER PARA LAS FUNCIONES PARES E IMPARES

De la definición de las funciones pares e impares se deduce que si $\psi(x)$ es una función par, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx = 2 \int_0^{\pi} \psi(x)\,dx.$$

Efectivamente,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} \psi(x)\,dx + \int_0^{\pi} \psi(x)\,dx = \int_0^{\pi} \psi(-x)\,dx + \int_0^{\pi} \psi(x)\,dx =$$
$$= \int_0^{\pi} \psi(x)\,dx + \int_0^{\pi} \psi(x)\,dx = 2 \int_0^{\pi} \psi(x)\,dx,$$

puesto que, según la definición de una función par $\psi(-x) = \psi(x)$.

Análogamente se puede demostrar que si $\varphi(x)$ es una función impar, entonces:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,dx = \int_0^{\pi} \varphi(-x)\,dx + \int_0^{\pi} \varphi(x)\,dx = -\int_0^{\pi} \varphi(x)\,dx + \int_0^{\pi} \varphi(x)\,dx = 0.$$

Si una función impar $f(x)$ se desarrolla en la serie de Fourier, el producto $f(x) \cos kx$ es también una función impar, y $f(x) \operatorname{sen} kx$

es una función par; por consiguiente,

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0; \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = 0, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

es decir, la serie de Fourier de una función impar contiene «solamente senos» (véase el ejemplo 1, § 2).

Si una función par se desarrolla en la serie de Fourier, un producto $f(x)$ sen $kx$ es una función impar y $f(x)$ cos $kx$ es una función par; por consiguiente

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx, \\ a_k &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

es decir, la serie de Fourier de la función par contiene «solamente cosenos» (véase el ejemplo 2, § 2).

Las fórmulas obtenidas permiten simplificar los cálculos de los coeficientes de Fourier, cuando la función dada es par o impar. Es evidente que no toda función periódica es par o impar (véase el ejemplo 5, § 2).

**Ejemplo.** Supongamos que es necesario desarrollar en la serie de Fourier la función par $f(x)$ de período $2\pi$ definida en el segmento $[0, \pi]$ por la igualdad

$$y = x.$$

Ya hemos desarrollado esta función en la serie de Fourier en el ejemplo 2, § 2 (véase fig. 358). Calculemos de nuevo los coeficientes de Fourier de esta función, aprovechando la paridad de esta función.

En virtud de las fórmulas (2), $b_k = 0$ para cualquier $k$;

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \pi, \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x \operatorname{sen} kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}[(-1)^k - 1] = \begin{cases} 0 & \text{para } k \text{ par,} \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{para } k \text{ impar.} \end{cases}$$

Hemos obtenido los mismos coeficientes que en el ejemplo 2, § 2, pero de modo más breve.

## § 5. SERIE DE FOURIER PARA LA FUNCION DE PERIODO $2l$

Sea $f(x)$ una función periódica de período $2l$, distinto, hablando en general, de $2\pi$. Desarrollémosla en la serie de Fourier.

Sustituyamos la variable según la fórmula:

$$x = \frac{l}{\pi} t.$$

Entonces, la función $f\left(\frac{l}{\pi} t\right)$ es una función periódica de $t$, de período $2\pi$. Podemos desarrollarla en la serie de Fourier en el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$;

$$f\left(\frac{l}{\pi} t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \operatorname{sen} kt), \tag{1}$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right)\cos kt\,dt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right)\operatorname{sen} kt\,dt.$$

Ahora regresemos a la variable anterior $x$:

$$x = \frac{l}{\pi} t, \qquad t = x\frac{\pi}{l}, \qquad dt = \frac{\pi}{l}\,dx.$$

Entonces tendremos:

$$\left.\begin{array}{c} a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx, \qquad a_k=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos k\frac{\pi}{l}x\,dx, \\ b_k=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\operatorname{sen} k\frac{\pi}{l}x\,dx. \end{array}\right\} \tag{2}$$

La fórmula (1) toma la forma:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x+b_k\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}x\right), \tag{3}$$

donde los coeficientes $a_0$, $a_k$, $b_k$ se calculan según las fórmulas (2). Esta es precisamente la serie de Fourier de una función periódica de período $2l$.

Notemos que todos los teoremas que han tenido lugar para las series de Fourier de las funciones periódicas de período $2\pi$, son válidos también para las series de Fourier de las funciones periódicas de cualquier otro período $2l$. En particular, queda en vigor el criterio suficiente del desarrollo de una función en la serie de Fourier (véase el fin de § 1): la observación sobre la posibilidad de calcular los coeficientes de la serie, integrando en un segmento arbitrario de longitud igual al período (véase § 3), así como la observación sobre la posibilidad de simplificar el cálculo de los coeficientes de la serie, cuando la función es par o impar (§ 4).

**Ejemplo.** Desarrollar en la serie de Fourier la función periódica $f(x)$ de período $2l$, definida en el segmento $[-l, l]$ por la igualdad $f(x)=|x|$ (fig. 365).

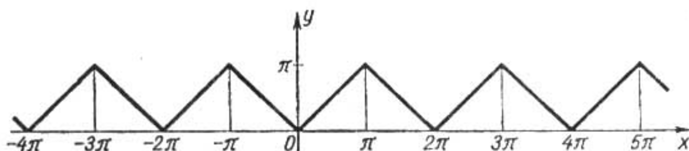



*Fig. 365*

**Solución.** Puesto que la función examinada es par, tenemos:

$$b_k=0; \quad a_0=\frac{2}{l}\int\limits_0^l x\,dx=l,$$

$$a_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l x\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx=\frac{2l}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi} x\cos kx\,dx=\begin{cases} 0 & \text{para } k \text{ par}, \\ -\frac{4l}{\pi^2k^2} & \text{para } k \text{ impar}. \end{cases}$$

Por consiguiente, el desarrollo tiene la forma:

$$|x| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{l}x}{1} + \frac{\cos\frac{3\pi}{l}x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos\frac{(2p+1)\pi}{l}x}{(2p+1)^2} + \ldots\right].$$

## § 6. DESARROLLO DE UNA FUNCION NO PERIODICA EN LA SERIE DE FOURIER

Supongamos que en cierto segmento $[a, b]$ está dada una función monótona por trozos $f(x)$ (fig. 366). Mostremos que podemos representar esta función $f(x)$ en los puntos de su continuidad por una

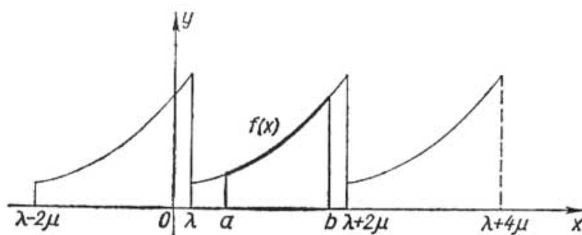



*Fig. 366*

suma de la serie de Fourier. Para eso examinemos una función arbitraria periódica monótona por trozos $f_1(x)$ de período $2\mu \geqslant |b-a|$, que coincide con la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$. (Hemos completado la definición de la función $f(x)$).

Desarrollemos la función $f_1(x)$ en la serie de Fourier. La suma de esta serie en todos los puntos del segmento $[a, b]$ (excepto los de discontinuidad) coincide con la función dada $f(x)$, lo que significa que hemos desarrollado $f(x)$ en la serie de Fourier en el segmento $[a, b]$.

Examinemos ahora el siguiente caso importante. Sea $f(x)$ una función dada en el segmento $[0, l]$. Completando la definición de esta función de modo arbitrario en el segmento $[-l, 0]$ (conservando la monotonía por trozos), podemos desarrollar esta función en la serie de Fourier. En particular, si completamos la definición de la función dada de modo tal que para $-l \leqslant x < 0$ sea $f(x) = f(-x)$, obtenemos en definitiva una función par (fig. 367). (En este caso se dice que la función $f(x)$ «es prolongada de manera par»). Esta función se desarrolla en la serie de Fourier que contiene

solamente cosenos. De este modo la función $f(x)$, dada en el segmento $[0, l]$, la hemos desarrollado en serie de cosenos.

Si continuamos la definición de la función $f(x)$ para $-l \leqslant x < 0$ de modo tal que $f(x) = -f(-x)$, obtenemos una función impar que se desarrolla en serie de senos (fig. 368). (La función $f(x)$ «es prolongada de manera impar»). De este modo, si en el segmento

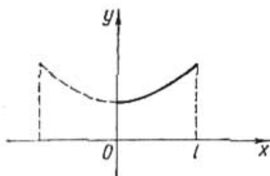


*Fig. 367*

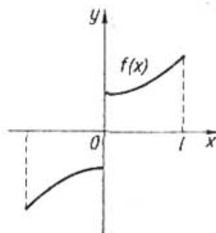


*Fig. 368*

$[0, l]$ está dada cierta función monótona por trozos $f(x)$, podemos desarrollarla tanto en la serie de Fourier de cosenos, como en la serie de Fourier de senos.

**Ejemplo 1.** Desarrollar la función $f(x) = x$ en el segmento $[0, \pi]$ en la serie de senos.

**Solución.** Prolongando esta función de manera impar (fig. 357) obtenemos la serie:

$$x = 2\left[\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \ldots\right]$$

(véase el ejemplo 1, § 2).

**Ejemplo 2.** Desarrollar la función $f(x) = x$ en el segmento $[0, \pi]$ en la serie de cosenos.

**Solución.** Prolongando esta función de manera par, tenemos:

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x \leqslant \pi$$

(fig. 358). Desarrollándola en la serie, hallamos:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right]$$

(véase el ejemplo 2, § 2). Pues, en el segmento $[0, \pi]$ tiene lugar la igualdad

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right].$$

## § 7. APROXIMACION EN PROMEDIO DE UNA FUNCION DADA CON AYUDA DE UN POLINOMIO TRIGONOMETRICO

La representación de una función en una serie infinita (de Fourier, Taylor, etc.) tiene prácticamente el sentido de que la suma finita, que se obtiene al interrumpir la serie en el $n$-ésimo término, es una expresión aproximada de la función que se desarrolla; esta expresión aproximada se puede llevar hasta cualquier grado de precisión, eligiendo un valor suficientemente grande de $n$. Sin embargo, el carácter de la representación aproximada puede ser diverso.

Así, por ejemplo, la suma $s_n$ de los $n$ primeros términos de la serie de Taylor coincide con la función examinada en un punto, y en este último tiene las derivadas hasta el $n$-ésimo orden que coinciden con las derivadas de la función analizada. Un polinomio de Lagrange de $n$-ésimo grado (véase § 9, capítulo VII, tomo I) coincide con la función considerada en $n+1$ puntos).

Analicemos el carácter que tiene la representación aproximada de una función periódica $f(x)$ por los polinomios trigonométricos de la forma

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx,$$

donde $a_0$, $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$, . . ., $a_n$, $b_n$ son los coeficientes de Fourier, es decir, por la suma de los $n$ primeros términos de la serie de Fourier. Hagamos primeramente algunas observaciones.

Supongamos que tenemos una cierta función $y = f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y queremos evaluar el error, cometido al sustituirla por otra función $\varphi(x)$. Se puede tomar en calidad de medida del error, por ejemplo, máx $|f(x) - \varphi(x)|$ en el segmento $[a, b]$, es decir, así llamado *desvío máximo* de la función $\varphi(x)$ de $f(x)$. Pero a veces es más natural tomar, como medida del error, así llamado *desvío medio cuadrático* $\delta$ que se determina por la igualdad

$$\delta^2 = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 \, dx.$$

Explicaremos en la figura 369 la diferencia entre el desvío medio cuadrático y el máximo.

Supongamos que la línea continua representa la función $y = f(x)$ y las líneas punteadas, las aproximaciones $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$. El desvío máximo de la curva $y = \varphi_1(x)$ es menor que él de la curva $y = \varphi_2(x)$, pero el desvío medio cuadrático de la primera

curva es mayor que él de la segunda, puesto que la curva $y = \varphi_2(x)$ difiere considerablemente de la curva $y = \varphi(x)$ sólo en un intervalo estrecho y por eso caracteriza mejor a la curva $y = f(x)$ que la primera.

Regresemos ahora a nuestro problema.

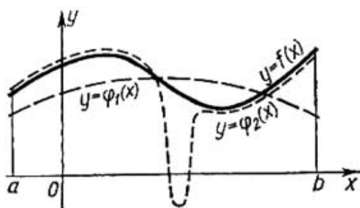



*Fig. 369*

*Sea dada una función periódica $f(x)$ de período $2\pi$. Entre todos los polinomios trigonométricos de n-ésimo orden*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx)$$

*es preciso hallar, mediante la elección de coeficientes $\alpha_k$ y $\beta_k$, un polinomio tal para el cual el desvío medio cuadrático, determinado por la igualdad*

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ f(x) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx) \right]^2 dx,$$

*tiene el valor mínimo.*

El problema se reduce a la determinación del mínimo de una función $2n + 1$ de las variables $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

Desarrollando el cuadrado que se encuentra bajo el signo de la integral, e integrando término a término, obtenemos:

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f^2(x) - 2f(x) \left[ \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx) \right] + \right.$$

$$\left. + \left[ \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx) \right]^2 \right\} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{\alpha_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\beta_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx + \frac{1}{2\pi}\frac{\alpha_0^2}{4}\int_{-\pi}^{\pi} dx +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}^2\,kx\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\alpha_0\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx + \frac{1}{2\pi}\alpha_0\sum_{k=1}^{n}\beta_k\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}\,kx\,dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ k\neq 1}}^{n}\alpha_k\alpha_j\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos jx\,dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\alpha_0\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\beta_j\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,\mathrm{sen}\,jx\,dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\pi}\sum_{\substack{j=1\\ k\neq 1}}^{n}\beta_k\beta_j\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}\,kx\,\mathrm{sen}\,jx\,dx.$$

Notemos que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0; \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx = b_k$$

son los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$.

Luego, según las fórmulas (I) y (II) § 1 tenemos: para $k = j$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx = \pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}^2\,kx\,dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}\,kx\cos jx\,dx = 0$$

y para $k \neq j$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos jx \, dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} jx \, dx = 0.$$

De este modo, obtenemos:

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx - \frac{\alpha_0 a_0}{2} - \\ - \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) + \frac{\alpha_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2).$$

**Adicionando y sustrayendo la suma**

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2),$$

**tenemos:**

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) + \frac{1}{4} (\alpha_0 - a_0)^2 + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2 . \qquad (1)$$

Los tres primeros términos de esta suma no dependen de la elección de los coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$. Los demás sumandos

$$\frac{1}{4} (\alpha_0 - a_0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2]$$

**no son negativos. Su suma alcanza el valor mínimo (igual a cero), si ponemos $\alpha_0 = a_0$, $\alpha_1 = a_1, \ldots, \alpha_n = a_n$, $\beta_1 = b_1, \ldots, \beta_n = b_n$. Con tal elección de los coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ el polinomio trigonométrico**

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx)$$

**difiere en lo mínimo de la función $f(x)$ en el sentido de que el desvío cuadrático $\delta_n^2$ es mínimo.**

Queda demostrado, pues, el teorema.

*Entre todos los polinomios trigonométricos de n-ésimo orden el polinomio, cuyos coeficientes son los coeficientes de Fourier de la función f (x), da el menor desvío medio cuadrático de esta función.*

El valor del desvío cuadrático mínimo es igual a:

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2). \tag{2}$$

Puesto que $\delta_n^2 \geqslant 0$, para cualquier $n$ tenemos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \geqslant \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2).$$

Por consiguiente, la serie del segundo miembro converge, cuando $n \to \infty$, y podemos escribir:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \geqslant \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2). \tag{3}$$

Esta correlación se llama *desigualdad de Bessel.*

Notemos sin demostración, que para toda función acotada y monótona por trozos el desvío medio cuadrático obtenido por la sustitución de la función dada por $n$-ésima suma parcial de la serie de Fourier, tiende a cero cuando $n \to \infty$, es decir, $\delta_n^2 \to 0$, cuando $n \to \infty$. Pero, entonces de la fórmula (2) se deduce la igualdad

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx, \tag{3'}$$

que se llama *igualdad de Liapunóv.* (Notemos que A. M. Liapunóv demostró esta igualdad incluso para una clase más amplia de funciones que la clase analizada aquí).

De lo demostrado se deduce que para la función que satisface a la igualdad de Liapunóv (en particular, para toda función acotada, monótona por trozos), la serie de Fourier correspondiente da un desvío medio cuadrático igual a cero.

**Observación.** Establezcamos una propiedad de los coeficientes de Fourier que será necesaria en lo sucesivo. Al principio, introduzcamos la definición.

Una función $f(x)$ se llama *continua por trozos* en el segmento $[a, b]$, si tiene un número finito de puntos de discontinuidad de primera especie en este segmento (o es continua en todos los puntos).

Demostremos la siguiente afirmación.

*Si la función $f(x)$ es continua por trozos en el segmento $[-\pi, \pi]$, sus coeficientes de Fourier tienden a cero, cuando $n \to \infty$, es decir,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{4}$$

**Demostración.** Si la función $f(x)$ es continua por trozos en el segmento $[-\pi, \pi]$, la función $f^2(x)$ también es continua por trozos en este segmento. Entonces, $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$ existe y es un número finito*). En este caso, de la desigualdad de Bessel (3) se deduce que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ converge. Pero, si la serie converge, entonces su término general tiende a cero, es decir, en el caso dado $\lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)=0$. De ahí obtenemos directamente las igualdades (4). Pues, para una función acotada y continua por trozos son válidas las igualdades

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx = 0.$$

Si la función $f(x)$ es periódica de período $2\pi$, podemos escribir las últimas igualdades de modo siguiente (para cualquier $a$):

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0; \qquad \lim_{n\to\infty}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx = 0.$$

Notemos que estas igualdades quedan en vigor, si integramos en un intervalo cualquiera $[a, b]$, es decir, las integrales

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,dx \quad \text{y} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx$$

tienden a cero, al aumentar $n$ indefinidamente, si $f(x)$ es una función acotada y continua por trozos.

En efecto, para precisar las ideas, suponiendo que $b - a < 2\pi$, analicemos una función auxiliar $\varphi(x)$ de período $2\pi$, definida de modo siguiente:

$$\varphi(x) = f(x), \text{ cuando } a \leqslant x \leqslant b,$$
$$\varphi(x) = 0, \quad \text{ cuando } b < x \leqslant a + 2\pi.$$

Entonces:

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,dx = \int_a^{a+2\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx,$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx = \int_a^{a+2\pi}\varphi(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx.$$

*) Esta integral podemos representarla como la suma de integrales definidas de las funciones continuas por tramos en que se divide el segmento $[-\pi, \pi]$.

Puesto que $\varphi(x)$ es una función acotada y continua por trozos, las integrales de los segundos miembros tienden a cero, cuando $n \to \infty$. Por consiguiente, las integrales de los primeros miembros también tienden a cero. De este modo, la afirmación es demostrada, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\cos nx\,dx = 0; \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx = 0 \tag{5}$$

para cualesquiera que sean los números $a$ y $b$ y la función $f(x)$, continua por trozos y acotada en el segmento $[a, b]$.

## § 8. INTEGRAL DE DIRICHLET

En este párrafo deduzcamos una fórmula que expresa la $n$-ésima suma parcial de una serie de Fourier mediante cierta integral. Necesitaremos de esta fórmula en los párrafos siguientes.

Examinemos la $n$-ésima suma parcial de una serie de Fourier para la función periódica $f(x)$ de período $2\pi$:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_k \cos kx + b_k\,\mathrm{sen}\,kx),$$

donde

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\,kt\,dt.$$

Introduciendo estas expresiones en la fórmula para $s_n(x)$, obtenemos:

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \\ + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\cos kx}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt + \frac{\mathrm{sen}\,kx}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\,kt\,dt\right],$$

o introduciendo $\cos kx$ y $\mathrm{sen}\,kx$ bajo el signo de la integral (lo que es posible, puesto que $\cos kx$ y $\mathrm{sen}\,kx$ no dependen de la variable de integración, y por consiguiente, pueden considerarse como constantes), obtenemos:

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \\ + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kx\cos kt\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\,kx\,\mathrm{sen}\,kt\,dt\right]$$

Sacando ahora $1/\pi$ fuera de los paréntesis y sustituyendo la suma de integrales por la integral de la suma, tenemos:

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{f(t)}{2}+\sum_{k=1}^{n}[f(t)\cos kx\cos kt+f(t)\operatorname{sen} kx\operatorname{sen} kt]\right\}dt,$$

ó

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx+\operatorname{sen} kt\operatorname{sen} kx)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt. \qquad (1)$$

Transformemos la expresión comprendida entre los corchetes. Sea:

$$\sigma_n(z)=\frac{1}{2}+\cos z+\cos 2z+\ldots+\cos nz;$$

entonces:

$$2\sigma_n(z)\cos z=\cos z+2\cos z\cos z+2\cos z\cos 2z+\ldots$$
$$\ldots+2\cos z\cos nz=\cos z+(1+\cos 2z)+$$
$$+(\cos z+\cos 3z)+(\cos 2z+\cos 4z)+\ldots$$
$$\ldots+[\cos(n-1)z+\cos(n+1)z]=1+2\cos z+$$
$$+2\cos 2z+\ldots+2\cos(n-1)z+\cos nz+\cos(n+1)z$$

ó

$$2\sigma_n(z)\cos z=2\sigma_n(z)-\cos nz+\cos(n+1)z,$$

$$\sigma_n(z)=\frac{\cos nz-\cos(n+1)z}{2(1-\cos z)}.$$

Pero:

$$\cos nz-\cos(n+1)z=2\operatorname{sen}(2n+1)\frac{z}{2}\operatorname{sen}\frac{z}{2},$$

$$1-\cos z=2\operatorname{sen}^2\frac{z}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\sigma_n(z)=\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{z}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{z}{2}}.$$

De este modo, se puede escribir la igualdad (1) en la forma:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{t-x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{t-x}{2}}\,dt.$$

Puesto que el integrando es periódico (de período $2\pi$), la integral conserva su valor en cualquier segmento de integración de longitud $2\pi$. Por eso podemos escribir:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)\,\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{t-x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{t-x}{2}}\,dt.$$

Introduzcamos una variable nueva $\alpha$, poniendo $t-x=\alpha$, $t=x+\alpha$. Obtendremos, pues, la fórmula:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha)\,\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha. \tag{2}$$

La integral del segundo miembro se llama *integral de Dirichlet*.

Pongamos en esta fórmula $f(x)\equiv 1$, entonces: $a_0=2$, $a_k=0$, $b_k=0$ cuando $k>0$; por consiguiente, $s_n(x)=1$ para cualquier $n$, y obtenemos la identidad:

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha, \tag{3}$$

que será necesaria a continuación.

## § 9. CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER EN UN PUNTO DADO

Supongamos que la función $f(x)$ es continua por trozos en el segmento $[-\pi, \pi]$.

Multiplicando ambos miembros de la identidad (3) del párrafo anterior por $f(x)$ e introduciendo $f(x)$ bajo el signo de la integral,

obtenemos la igualdad:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha.$$

Sustrayamos, miembro a miembro, esta igualdad de la igualdad (2) del párrafo anterior y obtenemos:

$$s_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\alpha)-f(x)]\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha.$$

De este modo, la convergencia de la serie de Fourier al valor de la función $f(x)$ en el punto dado depende de la convergencia hacia cero de la integral del segundo miembro, cuando $n\to\infty$.

Dividamos la última integral en dos integrales:

$$s_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\alpha)-f(x)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{sen} n\alpha\,d\alpha+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\alpha)-f(x)]\cos n\alpha\,d\alpha,$$

utilizando la fórmula $\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\alpha}{2}=\operatorname{sen} n\alpha\cos\frac{\alpha}{2}+\cos n\alpha\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$. Dividamos la primera integral del segundo miembro de la última igualdad, en tres integrales:

$$s_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}[f(x+\alpha)-f(x)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{sen} n\alpha\,d\alpha+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}[f(x+\alpha)-f(x)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{sen} n\alpha\,d\alpha+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}[f(x+\alpha)-f(x)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{sen} n\alpha\, d\alpha +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\alpha)-f(x)]\frac{1}{2}\cos n\alpha\, d\alpha.$$

Pongamos:

$$\Phi_1(\alpha)=\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{2}.$$

Como $f(x)$ es una función acotada y continua por trozos, $\Phi_1(\alpha)$ también es una función de $\alpha$, periódica, acotada y continua por trozos. Por consiguiente, la última integral del segundo miembro tiende a cero cuando $n\to\infty$, puesto que es coeficiente de Fourier de esta función. La función

$$\Phi_2(\alpha)=[f(x+\alpha)-f(x)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$$

es acotada cuando $-\pi\leqslant\alpha<-\delta$ y $\delta\leqslant\alpha\leqslant\pi$, además:

$$|\Phi_2(\alpha)|\leqslant[M+M]\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{\varepsilon}{2}},$$

donde $M$ es el límite superior de la magnitud $|f(x)|$. Además, la función $\Phi_2(\alpha)$ es también continua por trozos. Por consiguiente, en virtud de las fórmulas (5) del § 7, las integrales segunda y tercera tienden a cero, cuando $n\to\infty$.

De este modo, se puede escribir:

$$\lim_{n\to\infty}[s_n(x)-f(x)]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}[f(x+\alpha)-f(x)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{sen} n\alpha\, d\alpha.\quad(1)$$

La integración en la expresión del segundo miembro se efectúa en el intervalo $-\delta\leqslant\alpha\leqslant\delta$; por consiguiente, la integral depende

del valor de la función $f(x)$ solamente en el intervalo comprendido entre $x-\delta$ y $x+\delta$. De este modo, de la última igualdad se deduce una proposición importante: *la convergencia de la serie de Fourier en el punto dado $x$ depende solamente del comportamiento de la función $f(x)$ en la vecindad, por pequeña que sea, de este punto.*

En esto consiste así llamado *principio de localización durante el estudio de las series de Fourier. Si dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ coinciden en la vecindad de cierto punto $x$, entonces sus series de Fourier convergen o divergen simultáneamente en el punto dado.*

## § 10. ALGUNAS CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA CONVERGENCIA DE UNA SERIE DE FOURIER

En el párrafo anterior hemos mostrado que si una función $f(x)$ es continua por trozos en el segmento $[-\pi, \pi]$, la convergencia de su serie de Fourier en el punto dado $x_0$ al valor de la función $f(x_0)$ depende del comportamiento de la función en cierta vecindad arbitrariamente pequeña $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ de centro en el punto $x_0$.

Demostremos, ahora, que si la función $f(x)$ en la vecindad $x_0$ *es tal que existen los límites finitos*

$$\lim_{\alpha\to -0} \frac{f(x_0+\alpha)-f(x_0)}{\alpha} = k_1, \tag{1}$$

$$\lim_{\alpha\to +0} \frac{f(x_0+\alpha)-f(x_0)}{\alpha} = k_2, \tag{2}$$

y en el mismo punto $x_0$ la función es continua (fig. 370), entonces*) la serie de Fourier converge en este punto al valor correspondiente de la función $f(x)$.

**Demostración.** Examinemos la función $\Phi_2(\alpha)$ determinada en el párrafo anterior:

$$\Phi_2(\alpha) = [f(x_0+\alpha)-f(x_0)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}};$$

puesto que la función $f(x)$ es continua por trozos en el segmento $[-\pi, \pi]$ y continua en el punto $x_0$, entonces es continua en cierta

*) Si se cumplen las condiciones (1) y (2), se dice que la función $f(x)$ tiene en el punto $x$ una derivada a la derecha y una derivada a la izquierda. En la fig. 370 está representada una función donde $k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$, $k_1 \neq k_2$. Si $k_1 = k_2$, *es decir, si las derivadas a la derecha y a la izquierda son iguales,* la función es derivable en el punto dado.

vecindad $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ del punto $x_0$. Por eso la función $\Phi_2(\alpha)$ es continua en todos los puntos donde $\alpha \neq 0$, y $|\alpha| \leqslant \delta$. Cuando $\alpha = 0$, la función $\Phi_2(\alpha)$ no está definida.

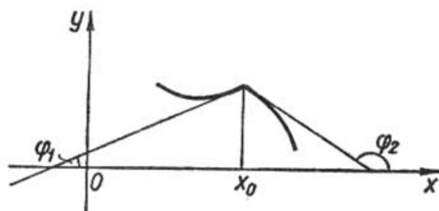



*Fig. 370*

Hallemos los límites $\lim\limits_{\alpha \to 0-0} \Phi_2(\alpha)$ y $\lim\limits_{\alpha \to 0+0} \Phi_2(\alpha)$, utilizando las condiciones (1) y (2):

$$\lim_{\alpha \to 0-0} \Phi_2(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0-0} [f(x_0 + \alpha) - f(x_0)] \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0-0} \frac{f(x_0 + \alpha) - f(x_0)}{\alpha} \frac{\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} \cos\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0-0} \frac{f(x_0 + \alpha) - f(x_0)}{\alpha} \lim_{\alpha \to 0-0} \frac{\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} \lim_{\alpha \to 0-0} \cos\frac{\alpha}{2} = k_1 \cdot 1 \cdot 1 = k_1.$$

De este modo, si determinamos adicionalmente la función $\Phi_2(\alpha)$ poniendo $\Phi_2(0) = k_1$, ésta será continua en el segmento $[-\delta, 0]$, y por consiguiente, también acotada. De modo análogo demostremos que

$$\lim_{\alpha \to 0+0} \Phi_2(\alpha) = k_2.$$

Por consiguiente, la función $\Phi_2(\alpha)$ es acotada y continua en el segmento $[0, \delta]$. Por lo tanto, en el intervalo $[-\delta, \delta]$ la función $\Phi_2(\alpha)$ es acotada y continua por trozos. Regresemos ahora a la igual-

dad (1) § 9 (designando $x$ por $x_0$)

$$\lim_{n\to\infty}[s_n(x_0)-f(x_0)]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}[f(x_0+\alpha)-f(x_0)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{sen}n\alpha\,d\alpha$$

ó

$$\lim_{n\to\infty}[s(x_0)-f(x_0)]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_2(\alpha)\operatorname{sen}n\alpha\,d\alpha.$$

Basándonos en las fórmulas (5) del § 7, deducimos que el límite del segundo miembro es igual a cero, por eso

$$\lim_{n\to\infty}[s_n(x_0)-f(x_0)]=0$$

ó

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x_0)=f(x_0).$$

El teorema queda así demostrado.

*La diferencia entre el teorema demostrado y el teorema formulado* en el § 1 consiste en lo siguiente: como sabemos en el teorema del § 1 para la convergencia de la serie de Fourier en el punto $x_0$ hacia el valor de la función $f(x)$ es necesario cumplir la condición de que $x_0$ sea un punto de continuidad en el segmento $[-\pi, \pi]$ y la función sea monótona por trozos; en el teorema recién demostrado es necesario que la función sea continua en el punto $x_0$ y que se cumplan las condiciones (1) y (2), mientras la función sea continua por trozos y acotada en todo el intervalo $[-\pi, \pi]$. Es evidente que estas condiciones son diferentes.

**Observación 1.** Si una función continua por trozos es derivable en el punto $x_0$, es evidente, que se cumplen las condiciones (1) y (2). Con ello, $k_1 = k_2$. Por consiguiente, en los puntos, donde la función $f(x)$ es derivable, la serie de Fourier converge hacia el valor de la función en el punto correspondiente.

**Observación 2.** 1°. La función examinada en el ejemplo 2 § 2 (fig. 358), satisface a las condiciones (1) y (2) en los puntos $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ En todos los demás puntos esta función es derivable. Por consiguiente, la serie de Fourier de esta función converge en cada punto hacia el valor de dicha función.

2°. La función examinada en el ejemplo 4 § 2 (fig. 361), satisface a las condiciones (1) y (2) en los puntos $\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi$. En todos estos puntos esta función es derivable y se representa por una serie de Fourier en cada punto.

3°. La función examinada en el ejemplo 1 § 2 (fig. 357) es discontinua en los puntos $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$. En todos los demás puntos esta función es derivable. Por consiguiente, en todos los puntos, excepto los puntos de discontinuidad, la serie de Fourier, que le corresponde, converge hacia el valor de la función en los puntos correspondientes. En los puntos de discontinuidad la suma de la serie de Fourier es igual al medio aritmético de los valores límites de la función a la derecha y a la izquierda, en el caso dado la suma es igual a cero.

## § 11. ANALISIS ARMONICO PRACTICO

La teoría del desarrollo de las funciones en series de Fourier se llama *análisis armónico.* Hagamos ahora algunas observaciones acerca del cálculo aproximado de los coeficientes de la serie de Fourier, es decir, respecto el análisis armónico práctico.

Como es sabido, los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$ de período $2\pi$ se determinan por las fórmulas

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx; \quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx;$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx.$$

En muchos casos de la práctica la función $f(x)$ se da o bien en forma de tabla (cuando la dependencia funcional se obtiene como el resultado de un experimento), o bien en forma de una curva trazada por cierto aparato. En estos casos el cálculo de los coeficientes de Fourier se realiza mediante los métodos aproximados de integración (véase § 8, cap. XI, tomo I).

Analicemos el intervalo $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ de longitud $2\pi$. Se puede lograrlo con la elección correspondiente de la escala en el eje $Ox$.

Dividamos el intervalo $[-\pi, \pi]$ en $n$ partes iguales por los puntos

$$x_0=-\pi,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n=\pi.$$

En este caso la longitud de un segmento parcial será igual a

$$\Delta x=\frac{2\pi}{n}.$$

Designemos los valores de la función $f(x)$ en los puntos $x_0$, $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$, respectivamente, por

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n.$$

Determinamos estos valores o bien por la tabla, o bien por la gráfica de la función dada, midiendo las ordenadas correspondientes.

Entonces, utilizando, por ejemplo, la fórmula de rectángulos (véase la fórmula (1) § 8, cap. XI, tomo I), determinamos los coeficientes de Fourier:

$$a_0=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad a_k=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\cos kx_i, \quad b_k=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \operatorname{sen} kx_i.$$

Existen esquemas elaborados para simplificar el cálculo de los coeficientes de Fourier. No podemos detenernos aquí en los detalles, pero notemos que existen aparatos (así llamados analizadores armónicos) que según la gráfica de la función dada, permiten calcular los valores aproximados de los coeficientes de Fourier.

## § 12. INTEGRAL DE FOURIER

Sea la función $f(x)$ definida en el intervalo infinito $(-\infty, \infty)$ y absolutamente integrable en éste, es decir, existe la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = Q. \tag{1}$$

Sea también la función $f(x)$ tal, que se desarrolla en una serie de Fourier en todo intervalo $(-l, +l)$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi}{l}x + b_k \operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}x, \tag{2}$$

donde

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l}t\,dt, \qquad b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}\,dt. \tag{3}$$

Poniendo en la serie (2) las expresiones de los coeficientes $a_k$ y $b_x$ de las fórmulas (3), se puede escribir:

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l}t\,dt\right)\cos\frac{k\pi}{l}x+$$

$$+\left(\int_{-l}^{l} f(t)\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}t\,dt\right)\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}x=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\left[\cos\frac{k\pi}{l}t\cos\frac{k\pi}{l}x+\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}t\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}x\right]dt$$

ó

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi(t-x)}{l}\,dt. \qquad (4)$$

Analicemos el problema de qué forma tome el desarrollo (4) durante el paso al límite, cuando $l\to\infty$.

Introduzcamos las siguientes designaciones:

$$\alpha_1=\frac{\pi}{l},\quad \alpha_2=\frac{2\pi}{l},\ \ldots,\ \alpha_k=\frac{k\pi}{l},\ \ldots \text{ y } \Delta\alpha_k=\frac{\pi}{l}. \qquad (5)$$

Sustituyéndolas en (4), obtenemos:

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\alpha_k(t-x)\,dt\right)\Delta\alpha_k. \qquad (6)$$

Cuando $l\to\infty$, el primer término del segundo miembro tiende a cero. En efecto,

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt\right|\leqslant\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(t)|\,dt<\frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt=\frac{1}{2l}Q\to 0.$$

Para cualquier $l$ fijado la expresión entre paréntesis es una función de $\alpha_k$ (véanse las fórmulas (5)) que toma los valores desde $\frac{\pi}{l}$ hasta $\infty$. Indiquemos sin demostración que si la función $f(x)$ es monótona por trozos en cada intervalo finito, acotada en el intervalo infinito y satisface a la condición (1), entonces, cuando $l\to\infty$, la fórmula (6) toma la forma:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha. \qquad (7)$$

La expresión del segundo miembro se llama *integral de Fourier* para la función $f(x)$. La igualdad (7) tiene lugar para todos los puntos donde la función es continua. En los puntos de discontinuidad se cumple la igualdad

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\right)dx=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \qquad (7')$$

Transformemos la integral del segundo miembro de la igualdad (7), desarrollando la expresión $\cos\alpha(t-x)$:

$$\cos\alpha(t-x)=\cos\alpha t\cos\alpha x+\operatorname{sen}\alpha t\operatorname{sen}\alpha x.$$

Poniendo esta expresión en la fórmula (7) y sacando cos $\alpha x$ y sen $\alpha x$ fuera de los signos de integrales, en las que integramos respecto a la variable $t$, obtenemos:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x\,d\alpha+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\operatorname{sen}\alpha t\,dt\right)\operatorname{sen}\alpha x\,d\alpha. \qquad (8)$$

Cada una de las integrales respecto a $t$, que se hallan entre paréntesis, existe, puesto que la función $f(t)$ es absolutamente integrable en el intervalo $(-\infty, \infty)$, y por consiguiente, son absolutamente integrables también las funciones $f(t)\cos\alpha t$ y $f(t)\operatorname{sen}\alpha t$.

Examinemos los casos particulares de la fórmula (8).

1. Sea $f(x)$ par. En este caso $f(t)\cos\alpha t$ es una función par y $f(t)\operatorname{sen}\alpha t$ es impar y obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt=2\int_{0}^{\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\operatorname{sen}\alpha t\,dt=0.$$

En este caso la fórmula (8) toma la forma:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x\,d\alpha. \qquad (9)$$

2. Sea $f(x)$ impar. Analizando el carácter de las integrales en la fórmula (8), en este caso, obtenemos:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty}f(t)\operatorname{sen}\alpha t\,dt\right)\operatorname{sen}\alpha x\,d\alpha. \qquad (10)$$

Si la función $f(x)$ esta definida sólo en el intervalo $(0, \infty)$, podemos representarla, para $x>0$, tanto por la fórmula (9), como por (10). En el primer caso la definimos adicionalmente en el intervalo $(-\infty, 0)$ de modo par, y en el segundo caso, de modo impar.

Notemos una vez más que en los puntos de discontinuidad, en vez de la expresión $f(x)$ en los primeros miembros de las igualdades (9) y (10) conviene escribir la expresión

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Regresemos a la fórmula (8). Las integrales comprendidas entre paréntesis son funciones de $\alpha$. Introduzcamos las designaciones:

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt,$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \alpha t \, dt.$$

Entonces, podemos escribir la fórmula (8) así:

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \operatorname{sen} \alpha x] \, d\alpha. \tag{11}$$

Se dice que la fórmula (11) da el desarrollo de la función $f(x)$ en armónicas con frecuencia $\alpha$ que varía continuamente desde 0 hasta $\infty$. La ley de distribución de las amplitudes y de las fases iniciales en función de la frecuencia $\alpha$ es expresada mediante las funciones $A(\alpha)$ y $B(\alpha)$. Regresemos a la fórmula (9). Pongamos:

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt, \tag{12}$$

entonces, la fórmula (9) toma la fórma:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} F(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha. \tag{13}$$

La función $F(\alpha)$ se llama *transformación coseno de Fourier* para la función $f(x)$.

Si en la igualdad (12) consideramos $F(\alpha)$ como una función dada y $f(t)$, como desconocida, entonces esta igualdad es la *ecuación integral* para la función $f(t)$. La fórmula (13) da la solución de esta ecuación.

Basándonos en la fórmula (10) podemos escribir las siguientes igualdades:

$$\Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \alpha t \, dt, \tag{14}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} \Phi(\alpha) \operatorname{sen} \alpha x \, d\alpha. \tag{15}$$

La función $\Phi(\alpha)$ se llama *transformación seno de Fourier*.

**Ejemplo.** Sea

$$f(x)=e^{-\beta x} \quad (\beta>0,\ x\geqslant 0).$$

Según la fórmula (12) determinamos la transformación coseno de **Fourier:**

$$F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\beta t}\cos\alpha t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\alpha}{\beta^2+\alpha^2}.$$

Según la fórmula (14) determinamos la transformación seno de Fourier:

$$\Phi(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\beta t}\operatorname{sen}\alpha t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\alpha}{\beta^2+\alpha^2}.$$

Según las fórmulas (13) y (15) hallamos las correlaciones mútuas:

$$\frac{2\beta}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{\beta^2+\alpha^2}\,d\alpha=e^{-\beta x} \quad (x\geqslant 0),$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha\operatorname{sen}\alpha x}{\beta^2+\alpha^2}\,d\alpha=e^{-\beta x} \quad (x>0).$$

## § 13. INTEGRAL DE FOURIER EN FORMA COMPLEJA

Si en la integral de Fourier (fórmula (7) § 12) está entre paréntesis la función par de $\alpha$, por consiguiente, ésta está definida también para los valores negativos de $\alpha$. De esto se deduce que podemos escribir la fórmula (7) en la forma:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha. \tag{1}$$

Examinemos ahora la siguiente expresión que es idénticamente igual a cero:

$$\int_{-M}^{M}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha=0.$$

La expresión del primer miembro es idénticamente igual a cero, puesto que la función de $\alpha$ entre paréntesis es una función impar y la integral de una función impar dentro de los límites de $-M$ a $+M$ es igual a cero. Es evidente que

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha=0$$

ó

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha=0. \tag{2}$$

**Observación.** Aquí es necesario explicar la siguiente circunstancia. Una integral convergente con límites infinitos se determina así:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha)\,d\alpha = \int_{-\infty}^{c} \varphi(\alpha)\,d\alpha + \int_{c}^{\infty} \varphi(\alpha)\,d\alpha =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{c} \varphi(\alpha)\,d\alpha + \lim_{M\to\infty} \int_{c}^{M} \varphi(\alpha)\,d\alpha \qquad (^{*})$$

a condición de que exista cada uno de los límites del segundo miembro (véase § 7, cap. XI, tomo I). Pero, en la igualdad (2) hemos escrito:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha)\,d\alpha = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \varphi(\alpha)\,d\alpha. \qquad (^{**})$$

Es evidente que puede ocurrir que el límite (**) existe, pero no existen los límites del segundo miembro de la igualdad (*). La expresión del segundo miembro de la igualdad (**), se llama *valor principal* de la integral. Pues, en la igualdad (2) se estudia el valor principal de la integral impropia (exterior). En el mismo sentido serán escritas también las integrales posteriores de este párrafo.

Al multiplicar los términos de la igualdad (2) por $\frac{i}{2\pi}$ y sumar con los miembros correspondientes de la igualdad (1), obtenemos:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,(\cos\alpha(t-x) + i \operatorname{sen}\alpha(t-x))\,dt \right] d\alpha$$

ó

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\alpha(t-x)}\,dt \right] d\alpha. \qquad (3)$$

Esta es precisamente la integral de Fourier en forma compleja. Podemos escribir la fórmula (3) en la forma siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\alpha t}\,dt \right) e^{-i\alpha x}\,d\alpha.$$

En virtud de la última igualdad, tenemos:

$$F^{*}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\alpha t}\,dt, \qquad (4)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F^{*}(\alpha)\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha. \qquad (5)$$

La función $F^*(\alpha)$, determinada por la fórmula (4), se llama *transformación de Fourier* para la función $f(x)$. La función $f(x)$, determinada por la fórmula (5), se llama *transformación inversa de Fourier* para la función $F^*(\alpha)$ (las transformaciones difieren por el signo de $i$).

**Ejercicios para el capítulo XVII**

**1.** Desarrollar en una serie de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$ la función

$$f(x) = 2x \text{ para } 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$
$$f(x) = x \text{ para } -\pi < x \leqslant 0.$$

*Respuesta*:

$$\frac{1}{4}\pi - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) + 3\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \ldots\right).$$

**2.** Utilizando el desarrollo de la función $f(x) = 1$ en el intervalo $(0, \pi)$ en senos de arcos múltiples, calcular la suma de la serie $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

*Respuesta*: $\frac{\pi}{4}$.

**3.** Aplicando el desarrollo en una serie de Fourier de la función $f(x) = x^2$, calcular la suma de la serie $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$

*Respuesta*: $\frac{\pi^2}{12}$.

**4.** Desarrollar la función $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$ en una serie de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

*Respuesta*:

$$\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \ldots$$

**5.** Desarrollar en una serie de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$ la función

$$f(x) = -\frac{(\pi + x)}{2} \quad \text{para} \quad -\pi \leqslant x < 0,$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x) \quad \text{para} \quad 0 \leqslant x < \pi.$$

*Respuesta*:

$$\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \ldots$$

**6.** Desarrollar en una serie de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$ la función

$$f(x) = -x \quad \text{para} \quad -\pi < x \leqslant 0,$$
$$f(x) = 0 \quad \text{para} \quad 0 < x \leqslant \pi.$$

*Respuesta*:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}.$$

**7.** Desarrollar en una serie de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$ la función

$$f(x)=1 \quad \text{para} \quad -\pi < x \leqslant 0,$$
$$f(x)=-2 \quad \text{para} \quad 0 < x \leqslant \pi.$$

*Respuesta*:

$$-\frac{1}{2}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1}.$$

**8.** Desarrollar la función $f(x)=x^2$ en el intervalo $(0, \pi)$ en una serie de senos.

*Respuesta*:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left\{\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}[(-1)^n-1]\right\}\operatorname{sen} nx.$$

**9.** Desarrollar la función $y=\cos 2x$ en el intervalo $(0, \pi)$ en una serie de senos.

*Respuesta*:

$$-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{2^2-1}+\frac{3\operatorname{sen} 3x}{2^2-3^2}+\frac{5\operatorname{sen} 5x}{2^2-5^2}+\ldots\right].$$

**10.** Desarrollar la función $y=\operatorname{sen} x$ en el intervalo $(0, \pi)$ en una serie de cosenos.

*Respuesta*:

$$\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{1-2^2}+\frac{\cos 4x}{1-4^2}+\ldots\right].$$

**11.** Desarrollar en una serie de Fourier la función $y=e^x$ en el intervalo $(-l, l)$.

*Respuesta*:

$$\frac{e^l-e^{-l}}{2l}+l(e^l-e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}+\pi(e^l-e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}.$$

**12.** Desarrollar la función $f(x)=2x$ en una serie de senos en el intervalo $(0, 1)$.

*Respuesta*:

$$1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi x}{n}.$$

**13.** Desarrollar en una serie de senos la función $f(x)=x$ en el intervalo $(0, l)$.

*Respuesta*:

$$\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}}{n}.$$

**14.** Desarrollar la función

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{para } 0<x\leqslant 1, \\ 2-x & \text{para } 1<x<2 \end{cases}$$

en el intervalo (0, 2): a) en una serie de senos;
*b*) en una serie de cosenos;

*Respuesta*:

$$\text{a)}\quad \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{sen}\dfrac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2};$$

$$\text{b)}\quad \frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}.$$

CAPITULO XVIII

# ECUACIONES DE LA FISICA MATEMATICA

## § 1. TIPOS FUNDAMENTALES DE LAS ECUACIONES DE LA FISICA MATEMATICA

Se llaman ecuaciones fundamentales de la física matemática (para el caso de unas funciones de dos variables independientes) a las siguientes ecuaciones diferenciales con derivadas parciales de segundo orden.

**I. Ecuación de onda:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (1)$$

A la necesidad de analizar esta ecuación conduce el examen de los procesos de vibraciones transversales de una cuerda, vibraciones longitudinales del vástago, oscilaciones eléctricas en un conductor, oscilaciones torsionales de un árbol, oscilaciones de un gas, etc. Esta ecuación es la más sencilla de *tipo hiperbólico*.

**II. Ecuación de conducción de calor o ecuación de Fourier:**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (2)$$

A la necesidad de analizar esta ecuación conduce el examen de los procesos de propagación de calor, filtración de líquido y gas en un medio poroso (por ejemplo, filtración de petróleo y gas en areniscos subterráneos), algunos problemas de la teoría de probabilidades, etc. Esta ecuación es la más sencilla de *tipo parabólico*.

**III. Ecuación de Laplace:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad (3)$$

El examen de los problemas sobre campos eléctricos y magnéticos, sobre el estado térmico estacionario, problemas de la hidrodinámica, difusión, etc., plantea la necesidad de analizar esta ecuación. Esta ecuación es la más sencilla de *tipo elíptico*.

En las ecuaciones (1), (2) y (3) la función desconocida $u$ depende de dos variables. Se estudian también las ecuaciones correspondientes para unas funciones con mayor número de variables. Así, la ecuación de onda con tres variables independientes tiene la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \tag{1'}$$

la ecuación de conducción de calor con tres variables independientes tiene la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \tag{2'}$$

la ecuación de Laplace con tres variables independiente tiene la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{3'}$$

## § 2. ECUACION DE OSCILACIONES DE UNA CUERDA. FORMULACION DEL PROBLEMA CON VALORES DE CONTORNO. ECUACIONES DE OSCILACIONES ELECTRICAS EN LOS CONDUCTORES

*En la física matemática bajo el término de cuerda se entiende* un hilo flexible y elástico. Las tensiones que surgen en la cuerda en cualquier momento, están dirigidas por la tangente a su perfil. Supongamos que en el momento inicial la cuerda de longitud $l$ está dirigida a lo largo del segmento del eje $Ox$ desde 0 hasta $l$. Supongamos también que los extremos de la cuerda están fijados en los puntos $x = 0$ y $x = l$. Si desviamos la cuerda de su posición inicial y luego la dejamos en libertad, o bien, sin desviar la cuerda, si damos en el momento inicial a sus puntos cierta velocidad, o si *desviamos la cuerda y damos a sus puntos cierta velocidad entonces* los puntos de la cuerda comienzan a realizar unos movimientos y se dice que la cuerda comienza a vibrar. El problema consiste en la determinación de la forma de la cuerda en cualquier momento y en la determinación de la ley de movimiento de cada punto de la cuerda en función del tiempo.

Analicemos pequeñas desviaciones de los puntos de la cuerda a partir de la posición inicial. Por tanto, se puede suponer que el

movimiento de los puntos de la cuerda se efectúa perpendicularmente al eje $Ox$ y en un mismo plano. Bajo esta suposición el proceso de oscilación de la cuerda se describe por una función $u(x, t)$, que da la magnitud de desplazamiento de un punto de la cuerda de abscisa $x$ en el momento $t$ (fig. 371).

Puesto que examinamos pequeñas desviaciones de la cuerda en el plano $(x, u)$, supongamos que la longitud del elemento de la

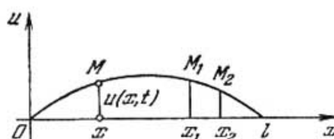



Fig. 371

cuerda $\smile M_1M_2$ es igual a su proyección sobre el eje $Ox$, o sea *), $\smile M_1M_2 = x_2 - x_1$. Supongamos también que la tensión es igual en todos los puntos de la cuerda; designemos esta tensión por $T$.

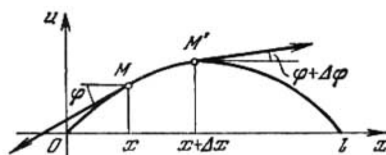



*Fig. 372*

Analicemos el elemento de la cuerda $MM'$ (fig. 372). En los extremos de este elemento actúan las fuerzas $T$ dirigidas por las tangentes a la cuerda. Supongamos que las tangentes forman con el eje $Ox$ los ángulos $\varphi$ y $\varphi + \Delta\varphi$. Entonces, la proyección sobre el eje $Ou$ de las fuerzas que actúan sobre el elemento $MM'$ será igual a $T\operatorname{sen}(\varphi + \Delta\varphi) - T\operatorname{sen}\varphi$. Puesto que el ángulo $\varphi$ es peque-

---

*) Esta suposición equivale al despreciamiento de la magnitud $u_x'^2$ en comparación con 1. En efecto,

$$\smile M_1M_2 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x'^2}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(1 + \frac{1}{2} u_x'^2 - \dots\right) dx \approx \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1.$$

ño, podemos poner tg $\varphi \approx$ sen $\varphi$, entonces tenemos:

$$T \operatorname{sen}(\varphi + \Delta\varphi) - T \operatorname{sen}\varphi \approx$$

$$\approx T \operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) - T \operatorname{tg}\varphi = T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,\ t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}\right] =$$

$$= T\frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x,\ t)}{\partial x^2}\Delta x \approx T\frac{\partial^2 u(x,\ y)}{\partial x^2}\Delta x,$$

$$0 < \theta < 1$$

(aquí hemos utilizado el teorema de Lagrange para la expresión comprendida entre corchetes).

Para obtener la ecuación del movimiento, hay que igualar las fuerzas exteriores, aplicadas al elemento, a la fuerza de inercia. Sea $\rho$ la densidad lineal de la cuerda. Entonces la masa del elemento de la cuerda será $\rho\Delta x$. La aceleración del elemento es igual a $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Por consiguiente, según el principio de d'Alembert, tenemos:

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x.$$

Reduciendo por $\Delta x$ y designando por $\frac{T}{\rho} = a^2$, otenemos la ecuación del movimiento

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Esta es la *ecuación de onda*, o sea, ecuación de vibración de la cuerda. Para la determinación completa del movimiento de la cuerda la ecuación (1) es insuficiente. La función desconocida $u(x, t)$ debe satisfacer además a las *condiciones de contorno* que indican lo que se hace en los extremos de la cuerda ($x = 0$ y $x = l$), y a las *condiciones iniciales* que describen el estado de la cuerda en el momento inicial ($t = 0$). El conjunto de las condiciones de contorno e iniciales se llama condiciones con *valores de contorno.*

Sean, por ejemplo, como hemos supuesto, fijos los extremos de la cuerda para $x = 0$ y $x = l$. Entonces, para todo $t$ han de cumplirse las igualdades:

$$u(0,\ t) = 0, \qquad (2')$$

$$u(l,\ t) = 0. \qquad (2'')$$

Estas igualdades son las *condiciones de contorno* para nuestro problema.

En el momento inicial $t = 0$ la cuerda tiene una forma determinada que le hemos atribuido. Sea esta forma determinada por la función $f(x)$. De este modo, debe ser

$$u(x, 0) = u|_{t=0} = f(x). \tag{3'}$$

Luego, en el momento inicial ha de ser dada la velocidad en cada punto de la cuerda que se determina por la función $\varphi(x)$. De este modo, debe ser

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x). \tag{3''}$$

Las condiciones (3′) y (3″) son las condiciones iniciales.

**Observación.** En particular, puede ser $f(x) \equiv 0$ ó $\varphi(x) \equiv 0$. Pero, si $f(x) \equiv 0$ y $\varphi(x) \equiv 0$, entonces la cuerda está en reposo, por consiguiente, $u(x, t) \equiv 0$.

Como hemos indicado arriba, a la ecuación (1) conduce también el problema de las oscilaciones eléctricas en los conductores. Demostremos esto. La corriente eléctrica en el conductor se caracteriza por la magnitud $i(x, t)$ y la tensión $v(x, t)$ que dependen de la coordenada $x$ del punto del conductor, y del tiempo $t$. Examinando el elemento del conductor $\Delta x$, podemos escribir que la caída de tensión en el elemento $\Delta x$ es igual a $v(x, t) - v(x + \Delta x, t) \approx \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x$. Esta caída de tensión se compone de la óhmica, igual a $iR\Delta x$, e inductiva, igual a $\frac{\partial i}{\partial t} L\,\Delta x$.

Pues,

$$-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x = iR\Delta x + \frac{\partial i}{\partial t} L\Delta x, \tag{4}$$

donde $R$ y $L$ son resistencia y coeficiente de autoinducción calculados por una unidad de longitud del conductor. El signo de menos se toma porque la corriente fluye en dirección inversa al incremento de $v$. Reduciendo por $\Delta x$, obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial x} + iR + L\frac{\partial i}{\partial t} = 0. \tag{5}$$

Luego, la diferencia entre la corriente que sale del elemento $\Delta x$ y la corriente que entra en éste por el tiempo $\Delta t$, será:

$$i(x, t) - i(x + \Delta x, t) \approx -\frac{\partial i}{\partial x}\Delta x\Delta t.$$

Una parte de esta diferencia se gasta para cargar elemento y es igual a $C\,\Delta x \frac{\partial v}{\partial t}\Delta t$; la otra parte se gasta en forma de fuga a través de la superficie lateral del conductor debido a la imperfección del aislamiento y es igual a $Av\,\Delta x\,\Delta t$ (aquí, $A$ es el coeficiente de fuga). Igualando estas expresiones y reduciendo por $\Delta x\,\Delta t$, obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial i}{\partial x}+C\frac{\partial v}{\partial t}+Av=0. \tag{6}$$

Las ecuaciones (5) y (6) suelen llamarse *ecuaciones telegráficas*.

Del sistema de ecuaciones (5) y (6) se puede obtener la ecuación que contiene solamente la función desconocida $i(x, t)$ y la ecuación que contiene solamente la función desconocida $v(x, t)$. Derivemos los términos de la ecuación (6) respecto a $x$ y los términos de la ecuación (5), respecto a $t$, y multipliquémoslos por $C$. Después de la sustracción obtenemos:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}+A\frac{\partial v}{\partial x}-CR\frac{\partial i}{\partial x}-CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=0.$$

Poniendo en la última ecuación la expresión $\frac{\partial v}{\partial x}$ de la ecuación (5), tenemos:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}+A\left(-iR-L\frac{\partial i}{\partial t}\right)-CR\frac{\partial i}{\partial x}-CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=0$$

ó

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+(CR+AL)\frac{\partial i}{\partial t}+ARi. \tag{7}$$

De modo análogo se obtiene la ecuación para la determinación de $v(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=CL\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+(CR+AL)\frac{\partial v}{\partial t}+ARv. \tag{8}$$

Si se puede despreciar la fuga a través del aislamiento ($A=0$) y la resistencia ($R=0$), las ecuaciones (7) y (8) pasan en las ecuaciones de onda:

$$a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 i}{\partial t^2},\qquad a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

donde está designado: $a^2 = \frac{1}{CL}$. Partiendo de las condiciones físicas, se formulan las condiciones de contorno e iniciales del problema.

## § 3. SOLUCION DE LA ECUACION DE VIBRACIONES DE UNA CUERDA POR EL METODO DE SEPARACION DE LAS VARIABLES (METODO DE FOURIER)

El método de separación de las variables (o método de Fourier) que examinemos ahora, es típico para la solución de numerosos problemas de la física matemática. Supongamos que se requiere hallar la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

que satisface a las condiciones con valores de contorno siguientes:

$$u(0, t) = 0, \tag{2}$$

$$u(l, t) = 0, \tag{3}$$

$$u(x, 0) = f(x), \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x). \tag{5}$$

Busquemos la solución particular de la ecuación (1) (que no es igual idénticamente a cero) que satisface a las condiciones de contorno (2) y (3) en forma de un producto de dos funciones $X(x)$ y $T(t)$ de las cuales la primera depende solamente de $x$, y la segunda, solamente de $t$:

$$u(x, t) = X(x)\, T(t). \tag{6}$$

Poniendo en la ecuación (1), obtenemos: $X(x)\, T''(t) = a^2 X''(x)\, T(t)$ y, dividiendo los términos de la igualdad por $a^2XT$,

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}. \tag{7}$$

En el primer miembro de esta igualdad se encuentra la función que no depende de $x$, en el segundo, la función que no depende de $t$. La igualdad (7) se verifica sólo en el caso en que los miembros primero y segundo no dependen ni de $x$, ni de $t$, es decir, son iguales a un número constante. Designémoslo por $-\lambda$, donde $\lambda > 0$ (luego

examinemos también el caso de $\lambda < 0$). Pues,

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

De estas igualdades obtenemos dos ecuaciones:

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{8}$$

$$T'' + a^2\lambda T = 0. \tag{9}$$

Las soluciones generales de estas ecuaciones serán: (véase cap. XIII, § 21):

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} x, \tag{10}$$

$$T(x) = C \cos a \sqrt{\lambda} t + D \operatorname{sen} a \sqrt{\lambda} t, \tag{11}$$

donde $A$, $B$, $C$, $D$ son constantes arbitrarias.

Sustituyendo las expresiones $X(x)$ y $T(t)$ en la igualdad (6), obtenemos:

$$u(x, t) = (A \cos \sqrt{\lambda} x + B \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} x)(C \cos a \sqrt{\lambda} t + D \operatorname{sen} a \sqrt{\lambda} t).$$

Escojamos ahora las constantes $A$ y $B$ de modo que se cumplan las condiciones (2) y (3). Puesto que $T(t) \not\equiv 0$ (en caso contrario $u(x, t) \equiv 0$ lo que contradice a la condición planteada), la función $X(x)$ debe satisfacer a las condiciones (2) y (3), es decir, ha de ser $X(0) = 0$, $X(l) = 0$. Poniendo los valores $x = 0$ y $x = l$ en la igualdad (10), en virtud de (2) y (3) obtenemos:

$$0 = A \cdot 1 + B \cdot 0,$$

$$0 = A \cos \sqrt{\lambda} l + B \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} l = 0.$$

De la primera ecuación hallamos que $A = 0$. De la segunda obtenemos:

$$B \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} l = 0.$$

$B \neq 0$, puesto que en caso contrario sería $X \equiv 0$ y $u \equiv 0$, lo que contradice a la condición. Por consiguiente, debe ser:

$$\operatorname{sen} \sqrt{\lambda} l = 0,$$

de donde

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{12}$$

(no tomamos el valor $n = 0$, puesto que en este caso sería $X \equiv 0$ y $u \equiv 0$). Pues, hemos obtenido

$$X = B \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x. \tag{13}$$

Los valores hallados de $\lambda$ se llaman *propios* para el problema dado con valores de contorno. Las funciones $X(x)$, que les corresponden, se llaman *funciones propias.*

**Observación.** Si tomamos en vez de $-\lambda$ la expresión $+\lambda = k^2$, entonces la ecuación (8) adquiere la forma:

$$X'' - k^2X = 0.$$

La solución general de esta ecuación:

$$X = Ae^{kx} + Be^{-kx}.$$

La solución en semejante forma que difiere de cero no puede satisfacer a las condiciones de contorno (2) y (3).

Sabiendo $\sqrt{\lambda}$ y aprovechando la igualdad (11) podemos escribir:

$$T(t) = C\cos\frac{an\pi}{l}t + D\operatorname{sen}\frac{an\pi}{l}t \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{14}$$

Para cada valor de $n$, por consiguiente, para cada $\lambda$, ponemos las expresiones (13) y (14) en la igualdad (6) y obtenemos la solución de la ecuación (1) que satisface a las condiciones de contorno (2) y (3). Designemos esta solución con $u_n(x, t)$:

$$u_n(x,\ t) = \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t + D_n\operatorname{sen}\frac{an\pi}{l}t\right). \tag{15}$$

Para cada valor de $n$ podemos tomar sus constantes $C$ y $D$, y por eso escribimos $C_n$ y $D_n$ (la constante $B$ está incluida en $C_n$ y $D_n$). Puesto que la ecuación (1) es lineal y homogénea, entonces la suma de soluciones también es una solución, y por eso la función representada por la serie

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,\ t)$$

ó

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t + D_n\operatorname{sen}\frac{an\pi}{l}t\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x, \tag{16}$$

también será la solución de la ecuación diferencial (1) que satisfacera a las condiciones de contorno (2) y (3). Es evidente, que la serie (16) será la solución de la ecuación (1) solamente en el caso en que los coeficientes $C_n$ y $D_n$ son tales que esta serie converge y convergen las series que se obtienen después de la derivación doble término a término respecto a $x$ y a $t$.

La solución (16) debe, además, satisfacer a las condiciones iniciales (4) y (5). Logremos esto, eligiendo las constantes $C_n$ y $D_n$. Poniendo en la igualdad (16) $t = 0$, obtenemos (véase la condición (4)):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x. \qquad (17)$$

Si la función $f(x)$ es tal que en el intervalo $(0, l)$ podemos desarrollarla en la serie de Fourier (véase § 1, cap. XVII), entonces se cumple la condición (17), si ponemos

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x\, dx. \qquad (18)$$

Luego, derivamos los términos de la igualdad (16) respecto a $t$ y ponemos $t = 0$. De la condición (5) se obtiene la igualdad

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{an\pi}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x.$$

Determinemos los coeficientes de Fourier de esta serie:

$$D_n \frac{an\pi}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x\, dx$$

ó

$$D_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \varphi(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x\, dx. \qquad (19)$$

Pues, hemos demostrado que si la serie (16), donde los coeficientes $C_n$ y $D_n$ están determinados según las fórmulas (18) y (19), permite la derivación doble término a término, entonces, esta serie representa la función $u(x, t)$ que es la solución de la ecuación (1) y satisface a las condiciones de contorno e iniciales (2) — (5).

**Observación.** Al resolver el problema examinado para la ecuación de onda mediante otro procedimiento, se puede demostrar que la serie (16) representa la solución, también, en el caso en que esta serie no permite la derivación término a término. Aquí, la función $f(x)$ debe ser dos veces derivable y $\varphi(x)$, una vez derivable.

## § 4. ECUACION DE PROPAGACION DEL CALOR EN UN VASTAGO. PLANTEO DEL PROBLEMA CON VALORES DE CONTORNO

Examinemos un vástago homogéneo de longitud $l$. Supongamos que la superficie lateral del vástago no conduce el calor y que la temperatura es igual en todos los puntos de la sección transversal del vástago. Estudiemos el proceso de difusión del calor en el vástago.

Dispongamos el eje $Ox$ de modo que un extremo del vástago coincida con el punto $x = 0$, y el otro, con el punto $x = l$ (fig. 373).

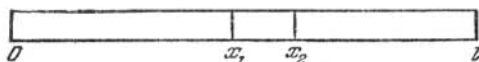



*Fig. 373*

Sea $u(x, t)$ la temperatura en la sección de lvástago con abscisa $x$ en el momento $t$. Experimentalmente está establecido que la velocidad de difusión del calor, es decir, la cantidad del calor que fluye a través de la sección de abscisa $x$ por la unidad de tiempo, se determina por la fórmula:

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial x} S, \tag{1}$$

donde $S$ es el área de la sección del vástago examinado y $k$ es el coeficiente de conductibilidad térmica *).

Analicemos un elemento del vástago comprendido entre las secciones de abscisas $x_1$ y $x_2$ ($x_2 - x_1 = \Delta x$). La cantidad del calor que pasa a través de la sección de abscisa $x_1$, durante el tiempo $\Delta t$ es igual a:

$$\Delta Q_1 = -k \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1} S \Delta t, \tag{2}$$

lo mismo tiene lugar para la sección de abscisa $x_2$:

$$\Delta Q_2 = -k \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2} S \Delta t. \tag{3}$$

---

*) La velocidad de propagación del calor o velocidad del flujo térmico se determina del modo siguiente:

$$q = \lim \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

donde $\Delta Q$ es la cantidad de calor que pasa por la sección $S$ en el tiempo $\Delta t$.

La afluencia del calor $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ en el elemento del vástago por el tiempo $\Delta t$ es igual a:

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = \left[-k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_1} S\,\Delta t\right] - \left[-k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_2} S\,\Delta t\right] \approx$$

$$\approx k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\Delta x S\,\Delta t. \qquad (4)$$

(Hemos aplicado el teorema de Lagrange para la diferencia

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2}\Bigg).$$

Esta afluencia del calor por el tiempo $\Delta t$ se gastó para elevar la temperatura del elemento del vástago en una magnitud $\Delta u$:

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = c\rho\Delta x S\,\Delta u$$

ó

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 \approx c\rho\Delta x S\frac{\partial u}{\partial t}\,\Delta t, \qquad (5)$$

donde $c$ es la capacidad calorífica de la sustancia del vástago, $\rho$ es la densidad de la sustancia del vástago ($\rho\Delta x S$ es la masa del elemento del vástago).

Igualando las expresiones (4) y (5) de la misma cantidad del calor $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$, obtenemos:

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\Delta x S\,\Delta t = c\rho\,\Delta x S\frac{\partial u}{\partial t}\,\Delta t$$

ó

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Designado $\frac{k}{c\rho} = a^2$, obtenemos definitivamente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (6)$$

Esta es precisamente la ecuación de propagación del calor (*ecuación de conducción del calor*) en un vástago homogéneo.

Para que sea bien determinada la solución de la ecuación (6), la función $u(x, t)$ ha de satisfacer a las condiciones con valores de contorno que corresponden a las condiciones físicas del problema.

Las condiciones con valores de contorno para resolver las ecuaciones (6) pueden ser diferentes. Las condiciones que corresponden al así llamado *primer problema con valores de contorno* para $0 \leqslant t \leqslant T$, son siguientes:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{7}$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \tag{8}$$

$$u(l, t) = \psi_2(t). \tag{9}$$

La condición (7) (*condición inicial*) físicamente corresponde al fenómeno siguiente: cuando $t = 0$, en diferentes secciones del vástago está dada la temperatura igual a $\varphi(x)$. Las condiciones (8) y (9) (condiciones de contorno) corresponden a que en los extremos del vástago, para $x=0$ y $x=l$, se mantienen las temperaturas iguales a $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$, respectivamente.

Se demuestra que la ecuación (6) tiene la única solución en el campo $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, que satisface a las condiciones (7), (8), (9).

## § 5. PROPAGACION DEL CALOR EN EL ESPACIO

Examinemos el proceso de propagación del calor en el espacio tridimensional. Sea $u(x, y, z, t)$ la temperatura en el punto de las coordenadas $(x, y, z)$ en el momento $t$. Experimentalmente está establecido que la velocidad del flujo del calor a través del área $\Delta s$, es decir, la cantidad del calor que fluye por la unidad de tiempo, se determina por la fórmula (análoga a la fórmula (1) del párrafo anterior):

$$\Delta Q = -k \frac{\partial u}{\partial n} \Delta s, \tag{1}$$

donde $k$ es el coeficiente de conductibilidad térmica del medio examinado que consideramos homogéneo e isotrópico, $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario dirigido por la normal al área $\Delta s$ en sentido de movimiento del calor. En virtud del § 14 del cap. VIII, t. I, se puede escribir:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son cosenos directores del vector $\boldsymbol{n}$, o

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \boldsymbol{n} \operatorname{grad} u.$$

Poniendo la expresión $\frac{\partial u}{\partial n}$ en la fórmula (1) obtenemos:

$$\Delta Q = -k\boldsymbol{n} \operatorname{grad} u \, \Delta s.$$

La cantidad del calor que fluye por el tiempo $\Delta t$ a través del área $\Delta s$ es igual a

$$\Delta Q \Delta t = -kn \text{ grad } u \, \Delta t \Delta s.$$

Regresemos al problema planteado al principio del párrafo. En el medio considerado separemos un volumen pequeño $V$, limitado por la superficie $S$. La cantidad del calor que fluye a través de la superficie $S$ será igual a

$$Q = -\Delta t \iint_S kn \text{ grad } u \, ds, \tag{2}$$

donde $n$ es el vector unitario dirigido por la normal exterior a la superficie $S$. Es evidente que la fórmula (2) da la cantidad del calor que entra en el volumen $V$ (o sale del volumen $V$) por el tiempo $\Delta t$. La cantidad del calor que entra en el volumen $V$ sirve para aumentar la temperatura de la sustancia de este volumen.

Examinemos un volumen elemental $\Delta v$. Supongamos que por el tiempo $\Delta t$ su temperatura haya aumentado en $\Delta u$. Es evidente que la cantidad del calor gastada para este aumento de la temperatura del elemento $\Delta v$ es igual a

$$c \Delta v \rho \Delta u \approx c \Delta v \rho \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t,$$

donde $c$ es la capacidad calorífica de la sustancia, $\rho$ es la densidad. La cantidad total del calor gastada para el aumento de la temperatura en el volumen $V$ por el tiempo $\Delta t$ será

$$\Delta t \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \, dv.$$

Pero esto es el calor que ha entrado en el volumen $V$ por el tiempo $\Delta t$; está determinado por la fórmula (2). De este modo, tiene lugar la igualdad

$$\Delta t \iint_S kn \text{ grad } u \, ds = \Delta t \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \, dv.$$

Reduciendo por $\Delta t$, obtenemos:

$$\iint_S kn \text{ grad } u \, ds = \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \, dv. \tag{3}$$

Transformamos según la fórmula de Ostrogradski (véase § 8, cap. XV) la integral de superficie que se encuentra en el primer

miembro de esta igualdad, poniendo $\boldsymbol{F} = k \operatorname{grad} u$:

$$\iint_S (k \operatorname{grad} u)\, \boldsymbol{n}\, ds = \iiint_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)\, dv.$$

Sustituyendo la integral doble del primer miembro de la igualdad (3) por la integral triple, obtenemos:

$$\iiint_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)\, dv = \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\, dv$$

ó

$$\iiint_V \left[\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\right] dv = 0. \tag{4}$$

Aplicando el teorema de la media para la integral triple del primer miembro (véase § 12, cap. XIV), tenemos:

$$\left[\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x=x_1,\ y=y_1,\ z=z_1} = 0, \tag{5}$$

donde el punto $P(x, y, z)$ es cierto punto del volumen $V$.

Puesto que podemos separar un volumen arbitrario $V$ en el espacio tridimensional donde se propaga el calor, y puesto que supongamos que el integrando en la igualdad (4) es continuo, entonces la igualdad (5) se cumpla en todo punto del espacio. Pues,

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u). \tag{6}$$

Pero

$$k \operatorname{grad} u = k\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + k\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + k\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

(véase § 14, cap. VIII, tomo I) y

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

(véase § 9, cap. XV). Poniendo en la ecuación (6), obtenemos:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right). \tag{7}$$

Si $k$ es constante, entonces:

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = k \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

y la ecuación (6) en este caso nos da:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

o, poniendo $\frac{k}{c\rho} = a^2$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{8}$$

La ecuación (8) se anota concisamente así:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u,$$

donde $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ es el operador de Laplace. La ecuación (8) es precisamente la *ecuación de conducción del calor en el espacio*. Para hallar su solución única que satisface al problema planteado, hay que dar las condiciones con valores de contorno.

Supongamos que tenemos un cuerpo $\Omega$ cuya superficie es $\sigma$. En este cuerpo se examina el proceso de propagación del calor. En el momento *inicial la temperatura del cuerpo está dada, lo que co*rresponde a que es conocido el valor de la solución para $t = 0$, o sea, la *condición inicial*:

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z). \tag{9}$$

Además, debe ser conocida la temperatura en todo punto $M$ de la *superficie $\sigma$ del cuerpo en cualquier momento de tiempo $t$, es decir*, la condición de contorno:

$$u(M, t) = \psi(M, t). \tag{10}$$

(Son posibles otras condiciones de contorno).

Si la función desconocida $u(x, y, z, t)$ no depende de $z$, lo que *corresponde a que la temperatura no depende de $z$, obtenemos* la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{11}$$

es decir, *la ecuación de propagación del calor en el plano.* Si se analiza la propagación del calor en un dominio plano $D$ con frontera $C$, entonces las condiciones de contorno, análogamente a (9) y (10), se formulan de modo siguiente:

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y),$$
$$u(M, t) = \psi(M, t),$$

donde $\varphi$ y $\psi$ son funciones dadas, $M$ es el punto de la frontera $C$.

Si la función $u$ no depende de $z$, ni de $y$, obtenemos la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

que es *la ecuación de propagación del calor en un vástago.*

## § 6. SOLUCION DEL PRIMER PROBLEMA CON VALORES DE CONTORNO PARA LA ECUACION DE CONDUCCION DEL CALOR POR EL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS

Igual que en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, al resolver las ecuaciones con derivadas parciales por el método de

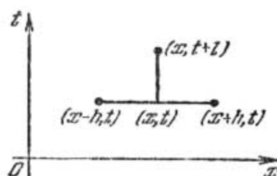



*Fig. 374*

diferencias finitas, las derivadas se sustituyen por diferencias correspondientes (véase la fig. 374):

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \approx \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h}\left[\frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} - \frac{u(x, t) - u(x-h, t)}{h}\right]$$

ó

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2}; \tag{2}$$

análogamente

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t} \approx \frac{u(x,\ t+l) - u(x,\ t)}{l}. \tag{3}$$

El primer problema con valores de contorno para la ecuación de conducción del calor se formula (véase el § 4) de modo siguiente. Se requiere hallar la solución de la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4}$$

que satisface a las condiciones con valores de contorno:

$$u(x,\ 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \tag{5}$$

$$u(0,\ t) = \psi_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{6}$$

$$u(l,\ t) = \psi_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{7}$$

es decir, se requiere hallar la solución $u(x,\ t)$ en un rectángulo limitado por las rectas $t = 0$, $x = 0$, $x = L$, $t \leqslant T$, si son dados los valores de una función desconocida en sus tres lados: $t = 0$, $x = 0$, $x = L$ (fig. 375). Cubramos nuestro dominio con una red formada por las rectas

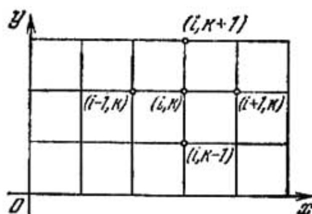


Fig. 375

$$x = ih, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$t = kl, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,$$

y determinemos los valores aproximados de la solución en los nudos de la red, es decir, en los puntos de intersección de estas rectas. Introduzcamos las designaciones: $u(ih,\ kl) = u_{i,\,k}$. Escribimos en vez de la ecuación (4) otra ecuación que le corresponde en forma de diferencias finitas para el punto $(ih,\ kl)$. En virtud de las fórmulas (3) y (2) obtenemos.

$$\frac{u_{i,\,k+1} - u_{i,\,k}}{l} = a^2 \frac{u_{i+1,\,k} - 2u_{i,\,k} + u_{i-1,\,k}}{h^2}. \tag{8}$$

Determinemos $u_{i,\,k+1}$:

$$u_{i,\,k+1} = \left(1 - \frac{2a^2 l}{h^2}\right) u_{i,\,k} + a^2 \frac{l}{h^2}(u_{i+1,\,k} + u_{i-1,\,k}). \tag{9}$$

De la fórmula (9) se deduce que si son conocidos tres valores en $k$-ésima línea: $u_{i,\,k}$, $u_{i+1,\,k}$, $u_{i-1,\,k}$, entonces se determina el valor

$u_{i,k+1}$ en la $(k+1)$-ésima línea. Sabemos ya todos los valores en la recta $t=0$ (véase la fórmula (5)). Según la fórmula (9) determinemos los valores en todos los puntos interiores del segmento $t=l$. En virtud de las fórmulas (6) y (7) sabemos los valores en los puntos extremos de este segmento. De este modo, pasando de una línea a otra, determinemos los valores de la solución desconocida en todos los nudos de la red.

Hemos demostrado que mediante la fórmula (9) se puede obtener el valor aproximado de la solución solamente en el caso en que

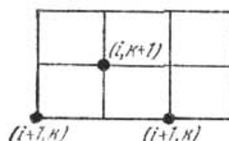



*Fig. 376*

$l \leqslant \frac{h^2}{2a^2}$ y no para la relación arbitraria de los pasos $h$ y $l$. La fórmula se simplifica especialmente, si el paso $l$ por el eje $t$ se eliga de modo que

$$1-\frac{2a^2 l}{h^2}=0$$

ó

$$l=\frac{h^2}{2a^2}.$$

En este caso la ecuación (9) toma la forma:

$$u_{i,\,k+1}=\frac{1}{2}\left(u_{i+1,\,k}+u_{i-1,\,k}\right). \tag{10}$$

Esta fórmula es especialmente cómoda para los cálculos (fig. 376). Por el método indicado se determina la solución en los nudos de la red. Se puede obtener el valor de la solucion entre los nudos de la red, por ejemplo, mediante la extrapolación, trazando un plano a traves de cada tres puntos en el espacio $(x, t, u)$. La solución obtenida mediante la fórmula (10) y extrapolada designemos por $u_h(x, t)$. Se demuestra que

$$\lim_{h\to 0} u_h(x,\ t)=u(x,\ t),$$

donde $u(x, t)$ es la solución de nuestro problema. Es demostrado también que

$$|u_h(x, t) - u(x, t)| < Mh^2,$$

donde $M$ es una constante que no depende de $h$.

### § 7. PROPAGACION DEL CALOR EN UN VASTAGO ILIMITADO

Sea dada una temperatura en el momento inicial en diferentes secciones de un vástago ilimitado. Es preciso determinar la distribución de la temperatura en el vástago en los momentos posteriores de tiempo. (Los problemas físicos se reducen al problema de propagación del calor en un vástago ilimitado, cuando el vástago es tan largo que la temperatura en los puntos interiores del mismo en los momentos examinados depende poco de las condiciones en los extremos del vástago).

Si el vástago coincide con el eje $Ox$, el problema se expresa matemáticamente de modo siguiente. Hallar la solucion de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

en el dominio $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, la que satisface a la condición inicial

$$u(x, 0) = \varphi(x). \tag{2}$$

Para hallar la solución apliquemos el método de separación de variables (véase el § 3), es decir, busquemos la solución particular de la ecuación (1) en forma de un producto de dos funciones:

$$u(x, t) = X(x)\, T(t). \tag{3}$$

Poniendo en la ecuación (1), tenemos: $X(x)\, T'(t) = a^2 X''(x)\, T(t)$ o

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2. \tag{4}$$

Ninguna de estas relaciones puede depender de $x$, ni de $t$, por lo cual las igualamos a la constante *) $-\lambda^2$. De (4) obtenemos dos ecuaciones:

$$T' + a^2\lambda^2 T = 0, \tag{5}$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0. \tag{6}$$

*) Como, según el sentido del problema $T(t)$ debe ser acotada para cualquier $t$, si $\varphi(x)$ es acotada, entonces $\frac{T'}{T}$ ha de ser negativa. Por eso escribimos $-\lambda^2$.

Resolviéndolas, hallamos:

$$T = Ce^{-a^2\lambda^2 t},$$

$$X = A\cos\lambda x + B\,\mathrm{sen}\,\lambda x.$$

Poniendo en (3), obtenemos:

$$u_\lambda(x,\ t) = e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\,\mathrm{sen}\,\lambda x] \tag{7}$$

(la constante $C$ está incluida en $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$).

Para cada valor de $\lambda$ obtenemos la solución de la forma (7). Para cada valor de $\lambda$ las constantes arbitrarias $A$ y $B$ tienen valores determinados. Por eso se puede considerar $A$ y $B$ como funciones de $\lambda$. La suma de las soluciones de la forma (7) también es una solución (debido a la linealidad de la ecuación (1)):

$$\sum_\lambda e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\,\mathrm{sen}\,\lambda x].$$

Integrando la expresión (7) respecto al parámetro $\lambda$ en los límites de 0 a $\infty$, también obtenemos la solución

$$u(x,\ t) = \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\,\mathrm{sen}\,\lambda x]\,d\lambda, \tag{8}$$

si $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ son tales que esta integral, su derivada respecto a $t$ y la segunda derivada respecto a $x$ existen y se obtienen mediante la derivación de la integral respecto a $t$ y $x$. Escojamos $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ de modo que la solución $u(x, t)$ satisfaga a la condición (2). Poniendo en la igualdad (8) $t = 0$, en virtud de la condición (2) obtenemos:

$$u(x,\ 0) = \varphi(x) = \int_0^\infty [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\,\mathrm{sen}\,\lambda x]\,d\lambda. \tag{9}$$

Supongamos que la función $\varphi(x)$ es tal que puede ser representada por la integral de Fourier (véase § 12, cap. XVII):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty \varphi(\alpha)\cos\lambda(\alpha - x)\,d\alpha\right)d\lambda$$

ó

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\left(\int_{-\infty}^\infty \varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha\,d\alpha\right)\cos\lambda x + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{-\infty}^\infty \varphi(\alpha)\,\mathrm{sen}\,\lambda\alpha\,d\alpha\right)\mathrm{sen}\,\lambda x\right]d\lambda \tag{10}$$

Comparando los segundos miembros de (9) y (10), obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha\,d\alpha, \\ B(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha)\,\mathrm{sen}\,\lambda\alpha\,d\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Sustituyendo las expresiones halladas de $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ en la fórmula (8), tenemos:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha\,d\alpha\right)\cos\lambda x + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha)\,\mathrm{sen}\,\lambda\alpha\,d\alpha\right)\mathrm{sen}\,\lambda x\right]d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha)(\cos\lambda\alpha\cos\lambda x + \mathrm{sen}\,\lambda\alpha\,\mathrm{sen}\,\lambda x)\,d\alpha\right]d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha)\cos\lambda(\alpha - x)\,d\alpha\right)d\lambda$$

o, cambiando el orden de integración, obtenemos definitivamente:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi(\alpha)\left(\int_{0}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\alpha - x)\,d\lambda\right)\right]d\alpha. \qquad (12)$$

Esta es la solución del problema planteado.

Transformemos la fórmula (12). Calculemos la integral entre paréntesis:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\alpha - x)\,d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}}\int_{0}^{\infty} e^{-z^2}\cos\beta z\,dz. \qquad (13)$$

La integral está transformada mediante las sustituciones:

$$a\lambda\sqrt{t} = z, \quad \frac{\alpha - x}{a\sqrt{t}} = \beta. \qquad (14)$$

Designemos:

$$K(\beta) = \int_0^\infty e^{-z^2} \cos \beta z \, dz. \tag{15}$$

Derivando *), obtenemos:

$$K'(\beta) = -\int_0^\infty e^{-z^2} z \operatorname{sen} \beta z \, dz.$$

Integrando por partes, hallamos:

$$K'(\beta) = \frac{1}{2} [e^{-z^2} \operatorname{sen} \beta z]_0^\infty - \frac{\beta}{2} \int_0^\infty e^{-z^2} \cos \beta z \, dz$$

o bien

$$K'(\beta) = -\frac{\beta}{2} K(\beta).$$

Integrando esta ecuación diferencial, obtenemos:

$$K(\beta) = Ce^{-\frac{\beta^2}{4}}. \tag{16}$$

Determinemos la constante $C$. De (15) se deduce:

$$K(0) = \int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(véase § 5, cap. XIV). Por consiguiente, en la igualdad (16) debe ser

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Pues,

$$K(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}}. \tag{17}$$

Pongamos el valor (17) de la integral (15) en (13):

$$\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t} \cos \lambda (\alpha - x) \, d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}}.$$

---

La posibilidad de realizar la derivación se argumenta fácilmente.

Sustituyendo $\beta$ por su expresión (14), obtenemos en definitiva el valor de la integral (13):

$$\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\alpha-x)\,d\lambda=\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}. \tag{18}$$

Poniendo esta expresión de la integral en la solución (12), obtenemos definitivamente:

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\,e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}\,d\alpha. \tag{19}$$

Esta fórmula se llama *integral de Poisson* y es la solución del problema planteado sobre la propagación del calor en un vástago ilimitado.

**Observación.** Se puede demostrar que la función $u(x,\ t)$, determinada por la integral (19), es la solución de la ecuación (1) y satisface a la condición (2), si la función $\varphi(x)$ es acotada en un intervalo infinito $(-\infty,\ \infty)$.

Establezcamos el sentido físico de la fórmula (19). Examinemos la función

$$\varphi^*(x)=\begin{cases}0 & \text{para}\quad -\infty<x<x_0,\\ \varphi(x) & \text{para}\quad x_0\leqslant x\leqslant x_0+\Delta x,\\ 0 & \text{para}\quad x_0+\Delta x<x<\infty.\end{cases} \tag{20}$$

Entonces la función

$$u^*(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^*(\alpha)\,e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}\,d\alpha \tag{21}$$

es la solución de la ecuación (1) que toma el valor de $\varphi^*(x)$, para $t=0$. Teniendo en cuenta (20), se puede escribir:

$$u^*(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\varphi(\alpha)\,e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}\,d\alpha.$$

Aplicando el teorema sobre la media a la última integral, obtenemos:

$$u^*(x,\ t)=\frac{\varphi(\xi)\,\Delta x}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}},\qquad x_0<\xi<x_0+\Delta x. \tag{22}$$

La fórmula (22) da el valor de temperatura en un punto del vástago en cualquier momento de tiempo, si para $t = 0$ en todo el vástago la temperatura es $u^* = 0$, excepto el segmento $[x_0, x_0+\Delta x]$, donde la temperatura es igual a $\varphi(x)$. La suma de temperaturas de la forma (22) da la solución (19). Notemos que si $\rho$ es la densidad lineal del vástago; $c$, capacidad calorífica del material, entonces la cantidad de calor en el elemento $[x_0, x_0 + \Delta x]$ para $t = 0$ es

$$\Delta Q \approx \varphi(\xi)\, \Delta x\, \rho c. \tag{23}$$

Analicemos luego la función

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}. \tag{24}$$

Comparándola con el segundo miembro de la fórmula (22), tomando en consideración (23), se dice que ésta da el valor de las temperaturas en todo punto del vástago en cualquier momento de tiempo $t$, si para $t = 0$ en la sección $\xi$ (caso límite, cuando $\Delta x \to 0$) hubo una fuente instantánea de calor con cantidad de calor $Q = c\rho$.

## § 8. PROBLEMAS QUE CONDUCEN A LA INVESTIGACION DE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACION DE LAPLACE. PLANTEO DE LOS PROBLEMAS CON VALORES DE CONTORNO

En el párrafo presente se examinan algunos problemas que conducen a la solución de la *ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{1}$$

Como ya hemos indicado, el primer miembro de la ecuación (1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\equiv \Delta u$$

se llama operador de Laplace. Las funciones $u$ que satisfacen a la ecuación de Laplace se llaman funciones armónicas.

**I. Distribución estacionaria de la temperatura en un cuerpo homogéneo.** Sea un cuerpo homogéneo $\Omega$ limitado por la superficie $\sigma$. En el § 5 se ha mostrado que la temperatura en diferentes puntos del cuerpo satisface a la ecuación (8):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Si el proceso es estacionario, es decir, si la temperatura no depende del tiempo, sino solamente de las coordenadas de los puntos del cuerpo, entonces $\frac{\partial u}{\partial t}=0$, y por consiguiente, la temperatura satisface a la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{1}$$

Para que la temperatura en el cuerpo se determine de esta ecuación unívocamente hay que saber la temperatura de la superficie $\sigma$. De este modo, para la ecuación (1) el problema con valores de contorno se formula de la manera siguiente.

Hallar la función $u(x, y, z)$ que satisface a la ecuación (1) en el interior del volumen $\Omega$ y toma en cada punto $M$ de la superficie $\sigma$ *los valores dados:*

$$u|_\sigma=\psi(M). \tag{2}$$

Este problema se llama *problema de Dirichlet o primer problema con valores de contorno* para la ecuación (1).

Si la temperatura es desconocida en la superficie del cuerpo, pero en todo punto de la superficie sabemos el flujo térmico que es proporcional a $\frac{\partial u}{\partial n}$ (véase el § 5), entonces en vez de la condición con valores de contorno en la superficie $\sigma$ (2) tendremos la condición:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\sigma=\psi^*(M). \tag{3}$$

El problema de hallar la solución de la ecuación (1) que satisface a la condición con valores de contorno (3) se llama *problema de Neuman o segundo problema con valores de contorno.*

Si se examina la distribución de las temperaturas en el dominio plano $D$ limitado por el contorno $C$, entonces la función $u$ depende de dos variables $x$ e $y$ y satisface a la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{4}$$

que se llama ecuación de Laplace en el plano. Las condiciones con valores de contorno (2) y (3) deben cumplirse en el contorno $C$.

**II. Corriente potencial de un líquido o gas. Ecuación de continuidad.** Sea la corriente de un líquido en el interior de un volumen $\Omega$ *limitado por una superficie* $\sigma$ *(en caso particular,* $\Omega$ *puede* ser también ilimitado). Sea $\rho$ la densidad del líquido. Designemos

la velocidad del líquido por

$$v = v_x i + v_y j + v_z k, \tag{5}$$

donde $v_x$, $v_y$, $v_z$ son las proyecciones del vector $v$ en los ejes de coordenadas. Separemos en el cuerpo $\Omega$ un pequeño volumen $\omega$ limitado por la superficie $S$. A través de cada elemento $\Delta s$ de la superficie $S$ en el tiempo $\Delta t$ pasará la cantidad de líquido

$$\Delta Q = \rho v n \Delta s \Delta t,$$

donde $n$ es un vector unitario dirigido a lo largo de la normal exterior respecto a la superficie $S$. La cantidad total de líquido $Q$ que entra en el volumen $\omega$ (o sale del volumen $\omega$) se expresa mediante la integral

$$Q = \Delta t \iint_S \rho v n \, ds \tag{6}$$

(véase §§ 5 y 6, cap. XV). La cantidad de líquido en el volumen $\omega$ en el momento $t$ fue

$$\iiint_\omega \rho \, d\omega.$$

Durante el tiempo $\Delta t$ la cantidad de líquido, en virtud de la variación de la densidad, cambia en la magnitud

$$Q = \iiint_\omega \Delta\rho \Delta\omega \approx \Delta t \iiint_\omega \frac{\partial \rho}{\partial t} d\omega. \tag{7}$$

Suponiendo que en el volumen $\omega$ no hay fuentes, concluimos que esta variación está provocada por la afluencia del líquido cuya cantidad está determinada por la igualdad (6). Igualando los segundos miembros de las igualdades (6) y (7) y reduciendo por $\Delta t$, obtenemos:

$$-\iint_S \rho v n \, ds = + \iiint_\omega \frac{\partial \rho}{\partial t} d\omega. \tag{8}$$

Transformemos la integral iterada de segundo orden del primer miembro según la fórmula de Ostrogradski (§ 8, cap. XV). Entonces la igualdad (8) toma la forma:

$$-\iiint_\omega \operatorname{div}(\rho v) \, d\omega = \iiint_\omega \frac{\partial \rho}{\partial t} d\omega$$

ó

$$\iiint_\omega \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) \right) d\omega = 0.$$

Puesto que el volumen $\omega$ es arbitrario y el integrando es continuo, obtenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{9}$$

ó

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0. \tag{9'}$$

Esta es la *ecuación de continuidad de corriente del líquido compresible*

**Observación.** En algunos problemas, por ejemplo, al examinar el proceso de movimiento de petróleo o gas en un pozo, en un medio poroso subterráneo, se puede aceptar

$$\boldsymbol{v} = -\frac{k}{\rho} \operatorname{grad} p,$$

donde $p$ es la presión, $k$ es el coeficiente de permeabilidad y

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx \lambda \frac{\partial p}{\partial t},$$

$\lambda$ = const. Poniendo en la ecuación de continuidad (9), obtenemos:

$$\lambda \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} p) = 0$$

ó

$$\lambda \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial p}{\partial z}\right). \tag{10}$$

Si $k$ es una constante, la ecuación toma la forma:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right), \tag{11}$$

y nosotros llegamos a la ecuación de conducción del calor.

Regresemos a la ecuación (9). Si el líquido es incompresible, entonces $\rho = \text{const}$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ y la ecuación (9) toma la forma:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = 0. \tag{12}$$

Si el movimiento es potencial, es decir, el vector $v$ es un gradiente de cierta función $\varphi$:

$$v = \text{grad}\, \varphi,$$

entonces la ecuación (12) toma la forma:

$$\text{div}\,(\text{grad}\, \varphi) = 0$$

ó

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{13}$$

es decir, la función potencial de la velocidad $\varphi$ debe satisfacer a la ecuación de Laplace.

En muchos problemas, como, por ejemplo, en los de filtración, se puede aceptar

$$v = -k_1\, \text{grad}\, p,$$

donde $p$ es la presión y $k_1$ es una constante; entonces obtenemos la ecuación de Laplace para determinar la presión

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \tag{13'}$$

Las condiciones con valores de contorno para la ecuación (13) o (13′) pueden ser las siguientes:

1. En la superficie $\sigma$ se dan los valores de la función desconocida $p$, (es decir, de la presión (condición (2)). Esto es el problema de Dirichlet.

2. En la superficie $\sigma$ se dan los valores de la derivada normal $\frac{\partial p}{\partial n}$, es decir, se da el flujo a través de la superficie (condición (3)). Esto es el problema de Neumann.

3. En una parte de la superficie $\sigma$ se dan los valores de la función desconocida $p$, es decir, de la presión y en otra parte de la superficie, los valores de la derivada normal $\frac{\partial p}{\partial n}$ es decir, del flujo a través de la superficie. Esto es el problema de Dirichlet-Neumann.

Si el movimiento es plano y paralelo, es decir, la función $\varphi$ (ó $p$) no depende de $z$, obtenemos la ecuación de Laplace en el dominio bidimensional $D$ con frontera $C$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{14}$$

Las condiciones con valores de contorno de la forma (2) (problema de Dirichlet), o de la forma (3) (problema de Neumann) se dan en el contorno $C$.

**III. Potencial de la corriente eléctrica estacionaria.** Supongamos que a traves de un medio homogéneo que llena cierto volumen $V$, pasa una corriente eléctrica cuya densidad en cada punto se da por el vector $\boldsymbol{J}(x, y, z) = \boldsymbol{J}_x i + \boldsymbol{J}_y i + \boldsymbol{J}_z K$. Supongamos, que la densidad de corriente no depende del tiempo $t$. Supongamos, también, que en el volumen examinado no hay fuentes de corriente. Por consiguiente, el flujo del vector $\boldsymbol{J}$ a través de cualquier superficie cerrada $S$ que se halla en el interior del volumen $V$, será igual a cero:

$$\iint_S \boldsymbol{J}\boldsymbol{n}\, ds = 0,$$

donde $\boldsymbol{n}$ es un vector unitario dirigido a lo largo de la normal exterior respecto a la superficie.

De la fórmula de Ostrogradski deducimos que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{J} = 0. \tag{15}$$

En virtud de la ley generalizada de Ohm se determina la fuerza eléctrica $\boldsymbol{E}$ en el medio conductor examinado:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{J}}{\lambda} \tag{16}$$

ó

$$\boldsymbol{J} = \lambda \boldsymbol{E},$$

donde $\lambda$ es la conductibilidad del medio la que consideramos constante.

De las ecuaciones generales del campo electromagnético se deduce que si el proceso es estacionario, entonces el campo vectorial $\boldsymbol{E}$ es irrotacional, es decir, rot $\boldsymbol{E} = 0$. Entonces, análogamente al caso examinado durante el análisis de campo de velocidades del líquido, el campo vectorial es potencial (véase § 9, cap. XV). Existe la función $\varphi$ tal que

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{grad} \varphi. \tag{17}$$

A base de (16) obtenemos:

$$\boldsymbol{J} = \lambda \operatorname{grad} \varphi. \tag{18}$$

De (15) y (18) se deduce:

$$\lambda \operatorname{div} (\operatorname{grad} \varphi) = 0$$

ó

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{19}$$

Obtenemos la ecuación de Laplace.

Resolviendo esta ecuación para las correspondientes condiciones con valores de contorno, hallamos la función $\varphi$ y, por las fórmulas (18) y (17), la corriente $\boldsymbol{J}$ y la fuerza eléctrica $\boldsymbol{E}$.

## § 9. ECUACION DE LAPLACE EN COORDENADAS CILINDRICAS. SOLUCION DEL PROBLEMA DE DIRICHLET PARA UN ANILLO CON VALORES CONSTANTES DE LA FUNCION DESCONOCIDA EN LAS CIRCUNFERENCIAS INTERNA Y EXTERNA

Sea $u(x, y, z)$ una función armónica de tres variables. Entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

Introduzcamos en el examen las coordenadas cilíndricas $(r, \varphi, z)$

$$x = r \cos \varphi, \qquad x = r \operatorname{sen} \varphi, \qquad z = z,$$

de donde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \qquad z = z. \tag{2}$$

Sustituyendo las variables independientes $x$, $y$ y $z$ por $r$, $\varphi$, y $z$, llegamos a la función $u^*$:

$$u(x, y, z) = u^*(r, \varphi, z).$$

Hallemos la ecuación a la cual satisfaga $u^*(r, \varphi, z)$ como función de argumentos $r$, $\varphi$ y $z$. Tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u^*}{\partial r\, \partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u^*}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \tag{3}$$

análogamente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 u^*}{\partial r\,\partial\varphi}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+$$
$$+\frac{\partial^2 u^*}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u^*}{\partial\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \qquad (4)$$

además,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}. \qquad (5)$$

Las expresiones para

$$\frac{\partial r}{\partial x},\quad \frac{\partial r}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$$

hallamos de la igualdad (2). Sumando los segundos miembros de las igualdades (3), (4) y (5) e igualando la suma a cero (puesto que la suma de los primeros miembros de estas igualdades es igual a cero en virtud de (1)), obtenemos:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}=0. \qquad (6)$$

Esta es la *ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas.*

Si la función $u$ no depende de $z$, pero depende de $x$ e $y$, entonces la función $u^*$ que depende sólo de $r$ y $\varphi$, satisface a la ecuación

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial\varphi^2}=0, \qquad (7)$$

donde $r$ y $\varphi$ son coordenadas polares en un plano.

Ahora hallemos la solución de la ecuación de Laplace en el dominio $D$ (anillo), limitado por las circunferencias $C_1$: $x^2+y^2=R_1^2$ y $C_2$: $x^2+y^2=R_2^2$, que toman los siguientes valores de contorno:

$$u|_{C_1}=u_1, \qquad (8)$$
$$u|_{C_2}=u_2, \qquad (9)$$

donde $u_1$ y $u_2$ son constantes.

Resolvamos el problema en coordenadas polares. Es evidente que conviene buscar la solución que no depende de $\varphi$. En este caso

la ecuación (7) toma la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0.$$

Integrando esta ecuación, hallamos:

$$u=C_1 \ln r+C_2. \tag{10}$$

Determinemos $C_1$ y $C_2$ de las condiciones (8) y (9):

$$u_1 = C_1 \ln R_1 + C_2,$$
$$u_2 = C_1 \ln R_2 + C_2.$$

De ahí hallamos:

$$C_1=\frac{u_2-u_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}, \qquad C_2=u_1-(u_2-u_1)\frac{\ln R_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

Sustituyendo los valores hallados de $C_1$ y $C_2$ en la fórmula (10) obtenemos en definitiva:

$$u=u_1+\frac{\ln\frac{r}{R_1}}{\ln\frac{R_2}{R_1}}(u_2-u_1). \tag{11}$$

**Observación.** En realidad hemos resuelto el siguiente problema. Hallar la función $u$ que satisface a la ecuación de Laplace en el dominio limitado por las superficies (en coordenadas cilíndricas):

$$r = R_1, \quad r = R_2, \quad z = 0, \quad z = H,$$

y que satisface a las siguientes condiciones de contorno:

$$u\big|_{r=R_1}=u_1, \qquad u\big|_{r=R_2}=u_2,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=H}=0$$

(el problema de Dirichlet-Neumann). Es evidente que la solución buscada no depende de $z$, ni de $\varphi$ y se da por la fórmula (11).

## § 10. SOLUCION DEL PROBLEMA DE DIRICHLET PARA UN CIRCULO

Supongamos que en el plano $Oxy$ hay un círculo de radio $R$ y el centro en el origen de coordenadas. Sea dada en su circunferencia cierta función $f(\varphi)$, donde $\varphi$ es un ángulo polar. Es preciso hallar

la función $u(r, \varphi)$, continua en el círculo, incluyendo el contorno, que satisface en el interior del círculo a la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

y en la circunferencia del círculo toma los valores dados

$$u|_{r=R}=f(\varphi). \tag{2}$$

Calculemos el problema en coordenadas polares. Escribamos la ecuación (1) en estas coordenadas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0$$

ó

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0. \tag{1'}$$

Busquemos la solución por el método de separación de variables, poniendo que

$$u = \Phi(\varphi)\, R(r). \tag{3}$$

Sustituyendo en la ecuación (1'), obtenemos:

$$r^2\Phi(\varphi)\,R''(r)+r\Phi(\varphi)\,R'(r)+\Phi''(\varphi)\,R(r)=0$$

ó

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=-\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-k^2. \tag{4}$$

Puesto que el primer miembro de esta igualdad no depende de $r$, y el segundo, de $\varphi$, por consiguiente, éstos son iguales a un número constante que designaremos por $-k^2$. De este modo, la igualdad (4) nos da dos ecuaciones:

$$\Phi''(\varphi)+k^2\Phi(\varphi)=0, \tag{5}$$

$$r^2R''(r)+rR'(r)-k^2R(r)=0. \tag{5'}$$

La solución general de la ecuación (5) será

$$\Phi = A\cos k\varphi + B\sin k\varphi. \tag{6}$$

Busquemos la solución de la ecuación (5') en forma de $R=r^m$. Sustituyendo $R=r^m$ en (5'), obtenemos:

$$r^2 m(r-1)r^{m-2}+rmr^{m-1}-k^2r^m=0$$

ó

$$m^2 - k^2 = 0.$$

Podemos escribir dos soluciones particulares linealmente independientes: $r^k$ y $r^{-k}$. La solución general de la ecuación (5′) será

$$R = Cr^k + Dr^{-k}. \tag{7}$$

Ponemos las expresiones (6) y (7) en (3):

$$u_k = (A_k \cos k\varphi + B_k \operatorname{sen} k\varphi)(C_k r^k + D_k r^{-k}). \tag{8}$$

La función (8) será la solución de la ecuación (1′) para todo valor de $k$ distinto de cero. Si $k = 0$, las ecuaciones (5) y (5′) toman la forma

$$\Phi'' = 0, \quad rR'' + R' = 0,$$

y por consiguiente,

$$u_0 = (A_0 + B_0\varphi)(C_0 + D_0 \ln r). \tag{8′}$$

La solución debe ser una función periódica de $\varphi$, puesto que, siendo igual el valor de $r$, para $\varphi$ y $\varphi + 2\pi$, hemos de tener un mismo valor de la solución, ya que examinamos un mismo punto del círculo. Por tanto, es evidente que en la fórmula (8′) debe ser $B_0 = 0$. Luego, busquemos una solución continua y finita en el círculo. Por consiguiente, en el centro del círculo, para $r = 0$, la solución debe ser finita, y por eso en la fórmula (8′) debe ser $D_0 = 0$ y en la fórmula (8), $D_k = 0$.

De este modo, el segundo miembro de (8′) se convierte en el producto $A_0C_0$, que designaremos por $A_0/2$. Pues,

$$u_0 = \frac{A_0}{2}. \tag{8″}$$

Formemos la solucion de nuestro problema en forma de una suma de soluciones de la forma (8) puesto que la suma de soluciones es la solución buscada. La suma debe ser una función periódica de $\varphi$. Esta condición se cumple, si cada sumando es una función periódica de $\varphi$. Para eso $k$ debe tomar valores enteros. (Notemos que si igualamos los miembros de la igualdad (4) al numero $+k^2$, no obtendríamos la solución periódica). Podemos limitarnos solamente a los valores positivos

$$k = 1, 2, \ldots, n, \ldots,$$

puesto que, en virtud de que las constantes $A$, $B$, $C$, $D$ son arbitrarias, los valores negativos de $k$ no dan nuevas soluciones particulares. Pues,

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \operatorname{sen} n\varphi)\, r^n \tag{9}$$

(la constante $C_n$ está incluida en $A_n$ y $B_n$). Elijamos ahora las constantes arbitrarias $A_n$ y $B_n$ de modo que se satisfaga la condición con valores de contorno (2). Poniendo en la igualdad (9) $r = R$, en virtud de la condición (2) obtenemos:

$$f(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \operatorname{sen} n\varphi)\, R^n \tag{10}$$

Para que tenga lugar la igualdad (10), es necesario que la función se desarrolle en la serie de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$ y que $A_n R^n$ y $B_n R^n$ sean los coeficientes de Fourier. Por consiguiente, $A_n$ y $B_n$ deben determinarse por las fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt, \\ B_n &= \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Pues, la serie (9) con coeficientes determinados por las fórmulas (11), será la solución de nuestro problema, si ella admite la derivación doble, término a término, respecto a $r$ y a $\varphi$ (pero esto no lo hemos demostrado). Transformemos la fórmula (9). Sustituyendo $A_n$ y $B_n$ por sus expresiones (11) y efectuando las transformaciones trigonométricas, obtenemos:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n(t-\varphi)\, dt \left(\frac{r}{R}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(t-\varphi)\right] dt. \tag{12}$$

Transformemos la expresion entre corchetes *).

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(t-\varphi)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n[e^{in(t-\varphi)}+e^{-in(t-\varphi)}]=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}\right)^n+\left(\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}\right)^n\right]=$$

$$=1+\frac{\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}}{1-\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}}+\frac{\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}}{1-\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}}=$$

$$=\frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}{1-2\frac{r}{R}\cos(t-\varphi)+\left(\frac{r}{R}\right)^2}=\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}. \qquad (13)$$

Sustituyendo la expresión entre corchetes en la fórmula (12) por la expresión (13) tenemos:

$$u(r,\ \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(t-\varphi)+r^2}\,dt. \qquad (14)$$

La fórmula (14) se llama *integral de Poisson*. Analizando esta fórmula se demuestra que si la función $f(\varphi)$ es continua, entonces la función $u(r,\ \varphi)$, determinada por la integral (14), satisface a la ecuación (1'), y, para $r\to R$, será que $u(r,\ \varphi)\to f(\varphi)$, es decir, $u(r,\ \varphi)$ es la solución del problema de Dirichlet para un círculo.

## § 11. SOLUCION DEL PROBLEMA DE DIRICHLET POR EL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS

Sea dada en el plano $Oxy$ un dominio $D$, limitado por el contorno $C$. Supongamos que en el contorno $C$ está dada una función continua $f$. Es preciso hallar una solución aproximada de la ecuación

*) Durante la deducción determinamos la suma de una progresión geométrica infinita, cuyo denominador es un número complejo y cuyo módulo es menor de la unidad. Esta fórmula de la suma de una progresión geométrica se deduce igual que en el caso de los números reales. Hay que tener en cuenta la definición del límite de la función compleja de un argumento real. Aquí, el argumento es $n$ (véase § 4, cap. VII, tomo I).

de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

que satisface a la condición de contorno

$$u|_C=f. \tag{2}$$

Tracemos dos familias de rectas:

$$x=ih \quad \text{y} \quad y=kh \tag{3}$$

donde $h$ es el número dado, $i$ y $k$ toman valores numéricos enteros sucesivos. Diremos que el dominio $D$ está cubierto de una *red*. Los puntos de intersección de las rectas los llamaremos *nudos de la red*.

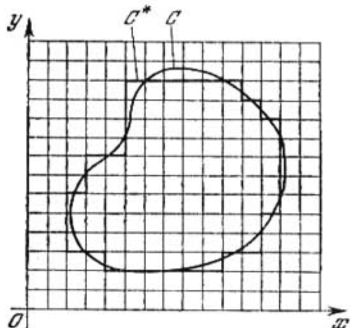



*Fig. 377*

El valor aproximado de la función desconocida en el punto $x=ih$, $y=kh$, lo designaremos por $u_{i,k}$ es decir, $u(ih, kh)=u_{i,k}$. Aproximemos el dominio $D$ mediante el dominio reticular $D^*$, compuesto de todos los cuadrados que enteramente se hallan dentro del dominio $D$, y algunos de éstos son cruzados por la frontera $C$ (con estos últimos se puede despreciar). En este caso el contorno $C$ se aproxima mediante el contorno $C^*$ compuesto por los segmentos de rectas de la forma (3). En cada nudo que se halla en el contorno $C^*$ demos un valor $f^*$ igual al valor de la función $f$ en el punto más próximo del contorno $C$ (fig. 377).

Examinemos los valores de la función desconocida solamente en los nudos de la red. Como hemos indicado en el § 6 las derivadas en el método de aproximación examinado se sustituyen por las diferencias finitas:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=ih,\ y=kh}=\frac{u_{i+1,k}-2u_{i,k}+u_{i-1,k}}{h^2},$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{x=ih,\ y=kh}=\frac{u_{i,k+1}-2u_{i,k}+u_{i,k-1}}{h^2}.$$

La ecuación diferencial (1) se sustituye por la *ecuación de diferencias* o por la *ecuación en diferencias finitas* (después de reducir por $h^2$):

$$u_{i+1,k}-2u_{i,k}+u_{i-1,k}+u_{i,k+1}-2u_{i,k}+u_{i,k-1}=0$$

ó (fig. 378)

$$u_{i,k} = \frac{1}{4}(u_{i+1,k} + u_{i,k+1} + u_{i-1,k} + u_{i,k-1}). \tag{4}$$

Para cada nudo de la red que se encuentra en el interior del dominio $D^*$ (y no se encuentra en la frontera $C^*$) componemos la ecuación (4). Si el punto ($x = ih$, $y = kh$) es vecino al punto del contorno

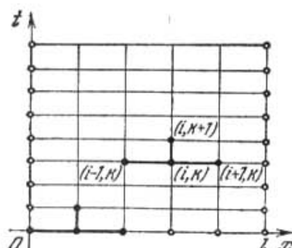



*Fig. 378*

$C^*$, entonces en el segundo miembro de la igualdad (4) serán los valores conocidos de $f^*$. De este modo, obtenemos un sistema heterogéneo de $N$ ecuaciones con $N$ incógnitas ($N$ es el número de nudos de la red que se encuentran en el interior del dominio $D^*$).

Demostremos que el sistema (4) tiene una y solamente una solución. Es el sistema de $N$ ecuaciones lineales con $N$ incógnitas. Tiene la única solución en el caso en que el determinante del sistema sea distinto de cero. El determinante del sistema difiere de cero si el sistema homogéneo tiene solamente una solución trivial (nula). El sistema será homogénea, si $f^* = 0$ en los nudos de la red en la frontera del contorno $C^*$. Pues, demostremos que en este caso todos los valores $u_{i,k}$ en todos los nudos interiores de la red son iguales a cero. Supongamos que en el interior del dominio hay $u_{i,k}$ diferentes de cero. Para mayor definición supongamos que el mayor de estos valores es positivo. Designémoslo por $\bar{u}_{i,k} > 0$. En virtud de la fórmula (4) escribimos:

$$\bar{u}_{i,k} = \frac{1}{4}(u_{i+1,k} + u_{i,k+1} + u_{i-1,k} + u_{i,k-1}). \tag{4'}$$

Esta igualdad puede tener lugar sólo en el caso si todos los valores de $u$, del segundo miembro, son iguales al valor óptimo $\bar{u}_{i,k}$. Ahora tenemos cinco puntos donde los valores de la función desconocida son $\bar{u}_{i,k}$. Si ninguno de estos puntos es de la frontera, entonces,

tomando uno de éstos y escribiendo para él la igualdad (4), demostremos que en algunos otros puntos el valor de la función desconocida será igual a $\bar{u}_{i,k}$. Prosiguiendo de este modo, llegamos a la frontera y demostremos que en el punto de la frontera el valor de la función será igual a $\bar{u}_{i,k}$. Esto contradice al hecho de que en los puntos de la frontera $f^* = 0$.

Suponiendo que en el interior del dominio hay un valor negativo mínimo, demostremos que en la frontera el valor de la función es negativo. Esto contradice a la condición dada.

Pues, el sistema (4) tiene una y solamente una solución.

**Los valores de $u_{i,k}$, determinados del sistema (4), son valores aproximados de la solución del problema de Dirichlet formulado anteriormente.** Hemos demostrado que si existe la solución del problema de Dirichlet para el dominio dado $D$ y la función dada $f$, (designémosla esta solución por $u(x, y)$), y si $u_{i,k}$ es la solución del sistema (4), entonces se verifica la correlación:

$$|u(x, y) - u_{i,k}| < Ah^2, \tag{5}$$

donde $A$ es una constante que no depende de $h$.

**Observación.** Puede ser justificado, aunque estrictamente no está demostrado, el siguiente procedimiento para evaluar el error de la solución aproximada. Sean: $u_{i,k}^{(2h)}$ la solución aproximada para el paso $2h$; $u_{i,k}^{(h)}$, la solución aproximada para el paso $h$; $E_h(x, y)$, el error de la solución $u_{i,k}^{(h)}$. Entonces tiene lugar la igualdad aproximada.

$$E_h(x, y) \approx \frac{1}{3}(u_{i,k}^{(2h)} - u_{i,k}^{(h)})$$

en los nudos comunes de las redes. Pues, para determinar el error de la solución aproximada para el paso $h$, hay que hallar la solución para el paso $2h$. Una tercera parte de la diferencia de estas soluciones aproximadas es la evaluación del error de la solución para el paso $h$. Esta observación se puede extender también a la solución de la ecuación de la conducción de calor mediante el método de diferencias finitas.

### Ejercicios para el capítulo XVIII

1. Deducir la ecuación de oscilaciones torsionales de un vástago cilíndrico homogéneo.

**Indicación.** El momento torsional en la sección del vástago de abscisa $x$ se determina por la fórmula $M = GI\frac{\partial\theta}{\partial x}$, donde $\theta(x, t)$ es el ángulo de torsión de la sección de abscisa $x$ en el momento $t$, $G$ es el módulo de desplazamiento $I$, es el momento polar de inercia de la sección transversal del vástago.

*Respuesta*: $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$, donde $a^2=\frac{GI}{k}$, $k$ es el momento de inercia de la unidad de longitud del vástago.

2. Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$ que satisface a las condiciones:

$$\theta(0,t)=0,\ \theta(l,t)=0,\ \theta(x,0)=\varphi(x),\ \frac{\partial\theta(x,0)}{\partial t}=0,$$

donde

$$\varphi(x)=\frac{2\theta_0 x}{l}\qquad \text{cuando } 0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2},$$

$$\varphi(x)=-\frac{2\theta_0 x}{l}+2\theta_0 \text{ cuando } \frac{l}{2}\leqslant x\leqslant l.$$

Dar la interpretación mecánica del problema.

*Respuesta*:

$$\theta(x,t)=\frac{8\theta_0}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi x}{l}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{l}.$$

3. Deducir la ecuación de oscilaciones longitudinales de un vástago cilíndrico homogéneo.

**Indicación.** Si $u(x,t)$ es el desplazamiento de la sección del vástago de abscisa $x$ en el momento $t$, entonces la tensión $T$ de extensión en la sección $x$ se determina por la fórmula $T=ES\frac{\partial u}{\partial x}$, donde $E$ es el módulo de elasticidad del material, $S$ es el área de la sección transversal del vástago.

*Respuesta*: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, donde $a^2=\frac{E}{\rho}$, $\rho$ es la densidad del material del vástago.

4. Un vástago homogéneo de longitud $2l$, bajo la acción de las fuerzas aplicadas a sus extremos, se ha reducido en la magnitud $2\lambda$. Cuando $t=0$, cesa la acción de las fuerzas exteriores. Determinar el desplazamiento $u(x,t)$ de la sección del vástago de abscisa $x$ en el momento $t$ (el punto medio del eje del vástago tiene abscisa $x=0$).

*Respuesta*:

$$u(x,t)=\frac{8\lambda}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l}.$$

5. Un extremo del vástago de longitud $l$ está fijo, sobre el otro actúa una fuerza de extensión $P$. Hallar las oscilaciones longitudinales del vástago, si para $t=0$ cesa la acción de fuerza $P$.

*Respuesta*:

$$\frac{8Pl}{Es\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}$$

(el sentido de $E$ y $S$ véase en el problema 3).

**6.** Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ que satisface a las condiciones:

$$u = (0, t) = 0, \quad u(l, t) = A \operatorname{sen} \omega t,$$
$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Dar la interpretación mecánica del problema.

*Respuesta*:

$$u(x, t) = \frac{A \operatorname{sen} \frac{\omega}{a} x \operatorname{sen} \omega t}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{a} l} + \frac{2A\omega a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\omega^2 - \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi a t}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}.$$

**Indicación.** Buscar la solución en forma de una suma de dos soluciones:

$$u = v + \omega, \text{ donde } \omega = \frac{A \operatorname{sen} \frac{\omega}{a} x \operatorname{sen} \omega t}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{a} l}$$

es la solución que satisface a las condiciones:

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0,$$
$$v(x, 0) = -w(x, 0), \quad \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = -\frac{\partial w(x, 0)}{\partial t}.$$

$\left(\text{Se supone que } \operatorname{sen} \frac{\omega}{a} l \neq 0\right)$.

**7.** Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ que satisface a las condiciones:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \ t > 0,$$
$$u(x, 0) = \begin{cases} x \text{ para } 0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2} \\ l - x \text{ para } \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

*Respuesta*:

$$h(x, t) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

**Indicación.** Resolver el problema por el método de separacion de variables.

**8.** Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ que satisface a las condiciones:

$$u(0, t) = u(0 \cdot l) = 0, \quad u(x, 0) = \frac{x(l - x)}{l^2}.$$

*Respuesta*:

$$u(x,\ t)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\,e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2t}{l^2}}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\,\pi x}{l}\ .$$

**9.** Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ que satisface a las condiciones:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ u\,(l,\ t)=u_0,\ \ u\,(x,\ 0)=\varphi\,(x).$$

Indicar el sentido físico del problema.

*Respuesta*:

$$u\,(x,\ t)=u_0+\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}\cos\frac{(2n+1)\,\pi}{2l}\,x,$$

donde

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi\,(x)\cos\frac{(2n+1)\,\pi x}{2l}\,dx-\frac{(-1)^n\,4u_0}{\pi\,(2n+1)}\ .$$

**Indicación.** Buscar la solución en la forma $u=u_0+v\,(x,\ t)$.

**10.** Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ que satisface a las condiciones:

$$u\,(0,\ t)=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=-Hu\,|_{x=l},\ u\,(x,\ 0)=\varphi\,(x).$$

Indicar el sentido físico del problema.

*Respuesta*:

$$u\,(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{p^2+\mu_n^2}{p\,(p+1)+\mu_n^2}\,e^{-\frac{\mu_n^2a^2t^2}{l^2}}\operatorname{sen}\frac{\mu_n x}{l}\ ,$$

donde

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi\,(x)\operatorname{sen}\frac{\mu_n x}{l}\,dx,\ p=Hl,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_n,$$

son raíces positivas de la ecuación $\operatorname{tg}\mu=-\frac{\mu}{p}$ .

**Indicación.** En el extremo del vástago, para $x=l$, tiene lugar un intercambio de calor con el medio ambiente cuya temperatura es igual a cero.

**11.** Hallar (según la fórmula (10), § 6, poniendo $h=0,\ 2$) la solución aproximada de la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, que satisface a las condiciones:

$$u\,(x,\ 0)=x\left(\frac{3}{2}-x\right),\ u\,(0,\ t)=0,\ u\,(1,\ t)=\frac{1}{2},\ 0\leqslant t\leqslant 4l.$$

12. Hallar la solución de la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ en la banda $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y < \infty$, que satisface a las condiciones:

$$u(0,\ y)=0,\ u(a,\ y)=0,\ u(x,\ 0)=A\left(1-\frac{x}{a}\right),\ u(x,\ \infty)=0.$$

*Respuesta*:

$$u(x,\ t)=\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{a}y}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}.$$

**Indicación.** Buscar la solución por el método de separación de variables.

13. Hallar la solución de la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ en un rectángulo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, que satisface a las condiciones:

$$u(x,\ 0)=0,\ u(x,\ b)=0,\ u(0,\ y)=Ay(b-y),\ u(a,\ y)=0.$$

*Respuesta*:

$$u(x,\ t)=\frac{8Ab^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{senh}\frac{(2n+1)\pi(a-x)}{b}}{(2n+1)^3}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi y}{b}}{\operatorname{senh}\frac{(2n+1)\pi a}{b}}.$$

14. Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ en el interior de un anillo limitado por las circunferencias $x^2+y^2=R_1^2$, $x^2+y^2=R_2^2$, que satisface a las condiciones

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_1}=+\frac{Q}{\lambda 2\pi R_1},\quad \left.u\right|_{r=R_2}=u_2.$$

Dar la interpretación hidrodinámica del problema.

**Indicación.** Resolver el problema en coordenadas polares.

*Respuesta*:

$$u=u_2-\frac{Q}{2\lambda\pi}\ln\frac{R_2}{r}.$$

15. La función $u(x,\ y)=e^{-y}\operatorname{sen} x$ es la solución de la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ en el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ que satisface a las condiciones:

$$u(0,\ y)=0,\ u(1,\ y)=e^{-y}\operatorname{sen}1,\ u(x,\ 0)=\operatorname{sen}x,\ u(x,\ 1)=e^{-1}\operatorname{sen}x.$$

**En los problemas 12-15 resolver las ecuaciones de Laplace para las condiciones de contorno dadas, por el método de diferencias finitas, cuando $h=0{,}25$. Comparar la solución aproximada con la exacta.**

CAPITULO XIX

# CALCULO OPERACIONAL Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES

Actualmente el cálculo operacional es una de las importantes esferas del análisis matemático. Los métodos de cálculo operacional se usan en la física, mecánica, electrotecnia y otras ciencias durante la solución de diversos problemas. El cálculo operacional ha encontrado una aplicación especialmente amplia en la automática y en la telemecánica. En el presente capítulo (basándonos en el material de los capítulos anteriores del manual) daremos los conceptos principales del cálculo operacional y los métodos operacionales de solución de las ecauciones diferenciales ordinarias.

## § 1. FUNCION INICIAL Y SU TRANSFORMACION (IMAGEN)

Sea una función de una variable real $t$, definida para $t \geqslant 0$ (a veces consideremos que la función $f(t)$ está definida en un intervalo infinito $-\infty < t < \infty$, pero $f(t) = 0$, cuando $t < 0$). Supongamos que la función $f(t)$ es continua por rozos (segmentos), es decir, tal que en todo intervalo finito tiene un número finito de puntos de discontinuidad de primera especie (véase § 9, capítulo II, tomo I). Para asegurar la existencia de algunas integrales en el intervalo infinito $0 \leqslant t < \infty$, impongamos sobre la función $f(t)$ una limitación adicional. Es decir, supongamos que existen números constantes positivos $M$ y $s_0$ tales que

$$|f(t)| < Me^{s_0 t} \tag{1}$$

para todo valor de $t$ del intervalo $0 \leqslant t < \infty$.

Examinemos el producto de la función $f(t)$ por la función compleja $e^{-pt}$ de una variable real *) $t$ donde $p = a + ib$ $(a > 0)$ es cierto número complejo

$$e^{-pt}f(t). \tag{2}$$

*) Sobre las funciones complejas de una variable real véase § 4, capítulo VII.

La función (2) es también una función compleja de una variable real $t$:

$$e^{-pt} f(t) = e^{-(a+ib)t} f(t) = e^{-at} f(t)\, e^{-ibt} =$$
$$= e^{-at} f(t) \cos bt - ie^{-at} f(t) \operatorname{sen} bt,$$

Examinemos ahora la integral impropia

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-at} f(t) \cos bt\, dt - i \int_0^\infty e^{-at} f(t) \operatorname{sen} bt\, dt. \qquad (3)$$

Mostremos que si la función $f(x)$ satisface a la condición (1) y $a > s_0$, entonces las integrales del segundo miembro de la igualdad (3) existen y la convergencia de las integrales es absoluta. Al principio, evaluemos la primera de estas integrales:

$$\left| \int_0^\infty e^{-at} f(t) \cos bt\, dt \right| \leqslant \int_0^\infty \left| e^{-at} f(t) \cos bt \right| dt <$$
$$< M \int_0^\infty e^{-at} e^{s_0 t}\, dt < M \int_0^\infty e^{-(a-s_0)t}\, dt = \frac{M}{a - s_0}.$$

De modo análogo se evalúa también la segunda integral. Ahora bien, la integral $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$ existe. Esta determina cierta función de $p$, la cual designemos *) por $F(p)$:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, (dt). \qquad (4)$$

La función $F(p)$ se llama transformación de Laplace o transformada $L$, o bien, simplemente, imagen de la función $f(t)$. La función $f(t)$ se llama función inicial u original. Si $F(p)$ es la imagen de la función $f(t)$, se escribe que

$$F(p) \doteq\!\!> f(t), \qquad (5)$$

ó

$$f(t) <\!\!\doteq F(p), \qquad (6)$$

ó

$$L\{f(t)\} = F(p). \qquad (7)$$

Como veremos, la razón de introducción de las imágenes consiste en que con su ayuda se logra simplificar la solución de muchos

*) La función $f(p)$, cuando $p \neq 0$, es la función de una variable compleja.

problemas, en particular, reducir la solución de ecuaciones diferenciales a las operaciones algebraicas simples para hallar una imagen. Sabiendo la imagen, se puede hallar el original, bien según tablas confeccionadas de antemano «original-imagen», bien según los métodos expuestos a continuación. Surgen las siguientes cuestiones naturales.

Sea dada cierta función $F(p)$. ¿Existe o no una función $f(t)$, para la cual $F(p)$ es su imagen? Sí existe ¿es esta función la única? Con suposiciones determinadas respecto a $F(p)$ y $f(t)$, a ambas cuestiones se da una respuesta positiva. En particular, la unicidad de imagen se establece mediante el siguiente teorema que citemos sin demostración.

**Teorema de unicidad.** *Si dos funciones continuas $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ tienen la misma imagen L de $F(p)$, entonces estas funciones son idénticamente iguales.*

Este teorema desempeña en lo ulterior un papel muy importante. Efectivamente, si al resolver un problema práctico, hemos determinado, de cierto modo, la imagen de la función desconocida, después, según la imagen hemos hallado la función inicial, entonces, basándonos en el teorema formulado, concluimos que la función hallada es la solución del problema planteado y otras soluciones no existen.

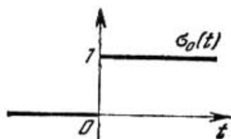


*Fig. 379*

### § 2. IMAGEN DE LAS FUNCIONES $\sigma_0(t)$, sen $t$, cos $t$

I. La función $f(t)$ definida de modo tal que

$$f(t) = 1, \quad \text{cuando} \quad t \geqslant 0$$
$$f(t) = 0, \quad \text{cuando} \quad t < 0,$$

se llama *función unitaria de Heaviside* y se designa por $\sigma(t)$. La gráfica de esta función está representada en la fig. 379. Hallemos la imagen $L$ de la función de Heaviside:

$$L\{\sigma_0(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt}\,dt = -\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

Pues*)

$$1 \risingdotseq \frac{1}{p} \tag{8}$$

*) Al calcular la integral $\int_0^{\infty} e^{-pt}dt$, se puede representarla como suma de integrales de funciones reales; así obtengamos el mismo resultado. Esta observación se refiere también a las dos integrales ulteriores.

o, más precisamente, $\sigma_0(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$.

En algunos tratados del cálculo operacional llaman la imagen de la función $f(t)$ a la expresión

$$F^*(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Con tal definición tenemos: $\sigma_0(t) \risingdotseq 1$, y, por consiguiente, $C \risingdotseq C$, o, más precisamente, $C\,\sigma_0(t) \risingdotseq C$.

II. Sea $f(t) = \operatorname{sen} t$; entonces

$$L\{\operatorname{sen} t\} = \int_0^\infty e^{-pt} \operatorname{sen} t\,dt = \left.\frac{e^{-pt}(-p \operatorname{sen} t - \cos t)}{p^2+1}\right|_0^\infty = \frac{1}{p^2+1}.$$

Pues,

$$\operatorname{sen} t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}. \tag{9}$$

III. Sea $f(t) = \cos t$; entonces

$$L\{\cos t\} = \int_0^\infty e^{-pt} \cos t\,dt = \left.\frac{e^{-pt}(\operatorname{sen} t - p\cos t)}{p^2+1}\right|_0^\infty = \frac{p}{p^2+1}.$$

Pues,

$$\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}. \tag{10}$$

## § 3. IMAGEN DE LA FUNCION CON ESCALA MODIFICADA DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE. IMAGEN DE LAS FUNCIONES sen $at$, cos $at$

Examinemos la imagen de la función $f(at)$, donde $a > 0$:

$$L\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(at)\,dt.$$

Sustituyamos la variable en la última integral, poniendo $z = at$; por consiguiente, $dz = a\,dt$; entonces obtenemos:

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{a}z} f(z)\,dz$$

ó

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

De este modo, si

$$F(p) \doteq\!\!\!\rightarrow f(t),$$

entonces:

$$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \doteq\!\!\!\rightarrow f(at). \qquad (11)$$

**Ejemplo 1.** De la fórmula (9), en virtud de la (11), obtenemos directamente:

$$\operatorname{sen} at \leftarrow\!\!\!\doteq \frac{1}{a}\,\frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1}$$

ó

$$\operatorname{sen} at \leftarrow\!\!\!\doteq \frac{a}{p^2 + a^2}. \qquad (12)$$

**Ejemplo 2.** De la fórmula (10), en virtud de la (11), tenemos:

$$\cos at \leftarrow\!\!\!\doteq \frac{1}{a}\,\frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1}$$

ó

$$\cos at \leftarrow\!\!\!\doteq \frac{p}{p^2 + a^2}. \qquad (13)$$

## § 4. PROPIEDAD DE LINEALIDAD DE LA IMAGEN

**Teorema.** *La imagen de una suma de varias funciones multiplicadas por constantes, es igual a la suma de imágenes de estas funciones multiplicadas por constantes correspondientes, es decir, si*

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t) \qquad (14)$$

($C_i$ son constantes) y

$$F(p) \doteq f(t), \quad F_i(p) \doteq f_i(t),$$

entonces

$$F(p) = \sum_{i=1}^{n} C_i F_i(p). \tag{14'}$$

**Demostración.** Multiplicando todos los términos de la igualdad (14) por $e^{-pt}$ e integrando respecto a $t$ en los límites de 0 a $\infty$ (sacando los factores $C_i$ fuera del signo de la integral), obtenemos la igualdad (14').

**Ejemplo 1.** Hallar la imagen de la función

$$f(t) = 3 \operatorname{sen} 4t - 2\cos 5t.$$

**Solución.** En virtud de las fórmulas (12), (13) y (15), obtenemos:

$$L\{f(t)\} = 3\frac{4}{p^2+16} - 2\frac{p}{p^2+25} = \frac{12}{p^2+16} - \frac{2p}{p^2+25}.$$

**Ejemplo 2.** Hallar la función inicial cuya imagen se expresa mediante la fórmula

$$F(p) = \frac{5}{p^2+(2)^2} + \frac{20p}{p^2+(3)^2}.$$

**Solución.** Interpretemos $F(p)$ de modo siguiente:

$$F(p) = \frac{5}{2}\,\frac{2}{p^2+(2)^2} + 20\,\frac{p}{p^2+(3)^2}.$$

Por consiguiente, según las fórmulas (12), (13), y (14'), obtenemos:

$$f(t) = \frac{5}{2}\operatorname{sen} 2t + 20\cos 3t.$$

Del teorema de unicidad, § 1 se deduce que esta es la única función inicial que corresponde a la $F(p)$ dada.

## § 5. TEOREMA DE DESPLAZAMIENTO

**Teorema.** *Si $F(p)$ es la imagen de la función $f(t)$, entonces $F(p+\alpha)$ es la imagen de la función $e^{-\alpha t} f(t)$, es decir,*

$$\left.\begin{array}{l} Si\ \ F(p) \doteq f(t), \\ entonces\ \ F(p+\alpha) \doteq e^{-\alpha t} f(t). \end{array}\right\} \tag{15}$$

(Aquí se supone que $\operatorname{Re}(p+\alpha) > s_0$).

**Demostración.** Hallemos la imagen de la función $e^{-\alpha t} f(t)$:

$$L\{e^{-\alpha t} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt-\alpha t} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(p+\alpha)t} f(t)\,dt.$$

De este modo,

$$L\{e^{-\alpha t}f(t)\} = F(p+\alpha).$$

El teorema demostrado permite ampliar considerablemente la familia de imágenes para las cuales se hallan fácilmente las funciones iniciales.

## § 6. IMAGENES DE LAS FUNCIONES $e^{-\alpha t}$, senh at, cosh $\alpha t$, $e^{-\alpha t}$ sen $\alpha t$, $e^{-\alpha t}$ cos $\alpha t$

De la fórmula (8), en virtud de las fórmulas (15), se deduce directamente:

$$\frac{1}{p+\alpha} \doteq\!> e^{-\alpha t}. \tag{16}$$

Análogamente

$$\frac{1}{p-\alpha} \doteq\!> e^{\alpha t}. \tag{16'}$$

Sustrayendo de los términos de la correlación (16′) los términos correspondientes de la correlación (16) y dividiendo los resultados de la resta por dos, obtenemos

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{p+\alpha}\right) \doteq\!> \frac{1}{2}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}),$$

ó

$$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2} \doteq\!> \operatorname{senh} \alpha t. \tag{17}$$

Análogamente, sumando (16) y (16′), obtenemos:

$$\frac{p}{p^2-\alpha^2} \doteq\!> \cosh \alpha t. \tag{18}$$

En virtud de las fórmulas (15), de la fórmula (12) se deduce:

$$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2} \doteq\!> e^{-\alpha t} \operatorname{sen} at. \tag{19}$$

A base de la fórmula (15), de la fórmula (13) se deduce:

$$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2} \doteq\!> e^{-\alpha t} \cos at. \tag{20}$$

**Ejemplo 1.** Hallar la función inicial cuya imagen se da por la fórmula: $F(p)=\frac{7}{p^2+10p+41}$.

**Solución.** Transformemos $F(p)$ en una expresion semejante a la que se encuentra en el primer miembro de la correlación (19):

$$\frac{7}{p^2+10p+41}=\frac{7}{(p+5)^2+16}=\frac{7}{4}\,\frac{4}{(p+5)^2+4^2}.$$

Pues,

$$F(p)=\frac{7}{4}\,\frac{4}{(p+5)^2+4^2}.$$

Por consiguiente, en virtud de la fórmula (19) tenemos:

$$F(p)\dot{\to}\frac{7}{4}e^{-5t}\operatorname{sen}4t.$$

**Ejemplo 2.** Hallar la función inicial cuya imagen se da por la fórmula

$$F(p)=\frac{p+3}{p^2+2p+10}.$$

**Solución.** Transformemos la función $F(p)$:

$$\frac{p+3}{p^2+2p+10}=\frac{(p+1)+2}{(p+1)^2+9}=\frac{p+1}{(p+1)^2+3^2}+\frac{2}{(p+1)^2+3^2}=$$
$$=\frac{p+1}{(p+1)^2+3^2}+\frac{2}{3}\,\frac{3}{(p+1)^2+3^2},$$

usando las fórmulas (19) y (20) hallemos la función inicial:

$$F(p)\dot{\to}e^{-t}\cos 3t+\frac{2}{3}e^{-t}\operatorname{sen}3t.$$

## § 7. DERIVACION DE LA IMAGEN

**Teorema.** *Si* $F(p)\dot{\to}f(t)$, *entonces*

$$(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}F(p)\dot{\to}t^nf(t). \tag{21}$$

**Demostración.** Primero demostremos que si $f(t)$ satisface a la condición (1), entonces la integral

$$\int_0^\infty e^{-pt}(-t)^nf(t)\,dt \tag{22}$$

existe.

Según la hipótesis, $|f(t)|<Me^{s_0t}$, $p=a+ib$, $a>s_0$; con esto, $a>0$, $s_0>0$. Es evidente que se halle $\varepsilon>0$ tal, que se cumplirá la desigualdad $a<s_0+\varepsilon$. Igual que en § 1 se demuestra

que existe la integral

$$\int_0^\infty e^{-(p-\varepsilon)t}\,|f(t)|\,dt.$$

Evaluemos ahora, la integral (22):

$$\int_0^\infty |e^{-pt}t^n f(t)|\,dt=\int_0^\infty |e^{-(p-\varepsilon)t}e^{-\varepsilon t}t^n f(t)|\,dt.$$

Puesto que la función $e^{-\varepsilon t}t^n$ es acotada y su valor absoluto es menor que cierto número $N$ para cualquier valor de $t>0$, podemos escribir:

$$\int_0^\infty |e^{-pt}t^n f(t)|\,dt<N\int_0^\infty |e^{-(p-\varepsilon)t}f(t)|\,dt=N\int_0^\infty e^{-(p-\varepsilon)t}\,|f(t)|\,dt<\infty.$$

De este modo, queda demostrado que la integral (22) existe. Pero podemos considerar esta integral como una derivada de $n$-ésimo orden respecto al parámetro*) $p$ de la integral

$$\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt.$$

Pues, de la fórmula

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$$

obtenemos la fórmula

$$\int_0^\infty e^{-pt}(-t)^n f(t)\,dt=\frac{d^n}{dp^n}\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt.$$

De estas dos igualdades obtenemos:

$$(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}F(p)=\int_c^\infty e^{-pt}t^n f(t),$$

es decir, la fórmula (21).

*) Hemos determinado antes la fórmula de derivación de una integral definida respecto a un parámetro real (véase § 10, capítulo XI, tomo I). Aquí, el parámetro $p$ es un número complejo, pero la fórmula de derivación queda válida.

Apliquemos la fórmula (22) para hallar la imagen de la función potencial. Escribamos la fórmula (8):

$$\frac{1}{p} \xrightarrow{\cdot} 1.$$

De esta fórmula, en virtud de la fórmula (21), obtenemos:

$$(-1)\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) \xrightarrow{\cdot} t$$

ó

$$\frac{1}{p^2} \xrightarrow{\cdot} t.$$

Análogamente

$$\frac{2}{p^3} \xrightarrow{\cdot} t^2.$$

Para cualquier $n$ tenemos:

$$\frac{n!}{p^{n+1}} \xrightarrow{\cdot} t^n. \tag{23}$$

**Ejemplo 1.** De la fórmula (véase (12))

$$\frac{a}{p^2+a^2} = \int_0^\infty e^{-pt} \operatorname{sen} at\, dt$$

derivando ambos miembros respecto al parámetro $p$ obtenemos:

$$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2} \xrightarrow{\cdot} t \operatorname{sen} at. \tag{24}$$

**Ejemplo 2.** De la fórmula (13), en virtud de la fórmula (21) obtenemos:

$$-\frac{a^2-p^2}{(p^2+a^2)^2} \xrightarrow{\cdot} t \cos at. \tag{25}$$

**Ejemplo 3.** En virtud de la fórmula (21), de (16) tenemos:

$$\frac{1}{(p+\alpha)^2} \xrightarrow{\cdot} te^{-\alpha t}. \tag{26}$$

## § 8. IMAGEN DE LAS DERIVADAS

**Teorema.** *Si* $F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t)$, *entonces*

$$pF(p) - f(0) \xrightarrow{\cdot} f'(t). \tag{27}$$

**Demostración.** Basándose en la definición de la imagen, podemos escribir:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt. \tag{28}$$

Supongamos que todas las derivadas $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^n(t)$, con que encontremos, satisfacen a la condición (1) y, por consiguiente, existe la integral (28), así como las integrales análogas para derivadas ulteriores. Calculando por partes la integral del segundo miembro de la igualdad (28), hallamos:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt = e^{-pt} f(t)\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Pero, según la condición (1)

$$\lim_{t\to\infty} e^{-pt} f(t) = 0,$$

y

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = F(p).$$

Por eso:

$$L\{f'(t)\} = -f(0) + pF(p).$$

El teorema queda demostrado. Examinemos ahora la imagen de las derivadas de cualquier orden. Sustituyendo en la fórmula (27) $F(p)$ por la expresión $pF(p) - f(0)$, y $f(t)$, por la expresión $f'(t)$, obtenemos:

$$p[pF(p) - f(0)] - f'(0) \mathrel{\dot{\rightarrow}} f''(t)$$

o, abriendo los corchetes:

$$p^2F(p) - pf(0) - f'(0) \mathrel{\dot{\rightarrow}} f''(t). \tag{29}$$

La imagen para la derivada de $n$-ésimo orden será:

$$p^nF(p) - [p^{n-1}f(0) + p^{n-2}f'(0) + \ldots$$
$$\ldots + pf^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)] \mathrel{\dot{\rightarrow}} f^{(n)}(t). \tag{30}$$

**Observación.** Las fórmulas (27), (29), (30) se simplifican, si $f(0) = f'(0) = \ldots f^{(n-1)}(0) = 0$. En este caso tenemos:

$$F(p) \mathrel{\dot{\rightarrow}} f(t),$$
$$pF(p) \mathrel{\dot{\rightarrow}} f'(t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p^nF(p) \mathrel{\dot{\rightarrow}} f^{(n)}(t).$$

## § 9. TABLA DE ALGUNAS IMAGENES

Para el uso cómodo de las imágenes obtenidas, reunámoslas en una tabla.

*Tabla 1*

| №№ | $F(p)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, pt$ | $f(t)$ |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{p}$ | $1$ |
| 2 | $\frac{a}{p^2+a^2}$ | $\operatorname{sen} at$ |
| 3 | $\frac{p}{p^2+a^2}$ | $\cos at$ |
| 4 | $\frac{1}{p+\alpha}$ | $e^{-\alpha t}$ |
| 5 | $\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$ | $\operatorname{senh} \alpha t$ |
| 6 | $\frac{p}{p^2-\alpha^2}$ | $\cosh \alpha t$ |
| 7 | $\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$ | $e^{-\alpha t} \operatorname{sen} at$ |
| 8 | $\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$ | $e^{-\alpha t} \cos at$ |
| 9 | $\frac{n!}{p^{n+1}}$ | $t^n$ |
| 10 | $\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$ | $t \operatorname{sen} at$ |
| 11 | $-\frac{a^2-p^2}{(p^2+a^2)^2}$ | $t \cos at$ |
| 12 | $\frac{1}{(p+\alpha)^2}$ | $te^{-\alpha t}$ |
| 13 | $\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$ | $\frac{1}{2a^3}(\operatorname{sen} at - at\cos at)$ |
| 14 | $(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p)$ | $t^n f(t)$ |
| 15 | $F_1(p)F_2(p)$ | $\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau$ |

**Nota:** Las fórmulas 13 y 15 de esta tabla las deduciremos más tarde.

**Observación.** Si en calidad de imagen de la función $f(t)$ tomamos:

$$F^*(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt,$$

entonces en las fórmulas 1-13 de la tabla las expresiones que se encuentran en la primera columna hay que multiplicarlas por $p$. Las fórmulas 14 y 15 toman el aspecto siguiente. Puesto que $F^*(p) = pF(p)$, entonces, sustituyendo en el primer miembro de la fórmula 14 $F(p)$ por la expresión $\frac{F^*(p)}{p}$ y multiplicando por $p$, obtenemos:

14′. $$(-1)^n p \frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{F^*(p)}{p}\right) \doteq t^n f(t).$$

Sustituyendo en el primer miembro de la fórmula 15

$$F_1(p) = \frac{F_1^*(p)}{p}, \qquad F_2(p) = \frac{F_2^*(p)}{p}$$

y multiplicando este producto por $p$, tenemos:

15′. $$\frac{1}{p} F_1^*(p) F_2^*(p) \doteq \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau.$$

## § 10. ECUACION AUXILIAR PARA LA ECUACION DIFERENCIAL DADA

Supongamos que tenemos una ecuación diferencial lineal de $n$-ésimo orden con coeficientes constantes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$:

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x(t) = f(t). \qquad (31)$$

Es preciso hallar la solución de esta ecuación $x = x(t)$ para $t \geqslant 0$, que satisface a las condiciones iniciales:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \ \ldots, \ x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \qquad (32)$$

Antes hemos resuelto el problema planteado del modo siguiente: hemos hallado la solución general de la ecuación (31) que contiene $n$ constantes arbitrarias; después hemos determinado las constantes de modo que se satisfagan las condiciones iniciales (32).

Ahora expondremos un método más sencillo de solución de este problema, el método de cálculo operacional. Hallemos la imagen $L$

de la solución $x(t)$ de la ecuación (31) que satisface a las condiciones (32). Designemos esta imagen $L$ por $\bar{x}(p)$; de modo que $\bar{x}(p) \doteq x(t)$.

Supongamos que existen las imágenes de la solución de la ecuación (31) y de sus derivadas hasta el orden $n$ (después de hallar la solución, podemos comprobar que esta suposición es válida).

Multipliquemos todos los términos de la igualdad (31) por $e^{-pt}$, donde $p = a + ib$, e integremos respecto a $t$ en los límites de 0 a $\infty$:

$$a_0 \int_0^\infty e^{-pt} \frac{d^n x}{dt^n} dt + a_1 \int_0^\infty e^{-pt} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} dt + \ldots + a_n \int_0^\infty e^{-pt} x(t)\, dt = \\ = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt. \qquad (33)$$

En el primer miembro de la igualdad se encuentran las imágenes $L$ de la función $x(t)$ y sus derivadas, en el segundo, la imagen $L$ de la función $f(t)$ que designemos por $F(p)$. Por consiguiente, se puede escribir la igualdad (33) en la forma:

$$a_0 L\left\{\frac{d^n x}{dt^n}\right\} + a_1 L\left\{\frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}\right\} + \ldots + a_n L\{x(t)\} = L\{f(t)\}.$$

Sustituyendo en esta igualdad las imágenes de la función y de sus derivadas por las expresiones (27), (29), (30), obtenemos:

$$a_0 \{p^n \bar{x}(p) - [p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x_0' + p^{n-3} x_0'' + \ldots + x_0^{(n-1)}]\} + \\ + a_1 \{p^{n-1} \bar{x}(p) - [p^{n-2} x_0 + p^{n-3} x_0' + \ldots + x_0^{(n-2)}]\} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_{n-1} \{p\bar{x}(p) - [x_0]\} + a_n \bar{x}(p) = F(p). \qquad (34)$$

La ecuación (34) se llama *ecuación auxiliar* o la *ecuación de imagen*. En esta ecuación la incógnita es la imagen $\bar{x}(p)$, la cual desde ésta se determina. Transformémosla dejando en el primer miembro los términos que contienen $\bar{x}(p)$:

$$\bar{x}(p)[a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n] = \\ = a_0 [p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x_0' + \ldots + x_0^{(n-1)}] + \\ + a_1 [p^{n-2} x_0 + p^{n-3} x_0' + \ldots + x_0^{(n-2)}] + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_{n-2} [p x_0 + x_0'] + a_{n-1} [x_0] + F(p). \qquad (34')$$

El coeficiente de $\bar{x}(p)$ en el primer miembro de la igualdad (34′) es un polinomio de $p$ de $n$-ésimo grado que se obtiene si en el primer miembro de la ecuación (31) en vez de las derivadas ponemos las potencias respectivas de $p$. Designémoslo por $\varphi_n(p)$:

$$\varphi_n(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n. \qquad (35)$$

El segundo miembro de la ecuación (34′) se compone del modo siguiente:

el coeficiente $a_{n-1}$ se multiplica por $x_0$,

el coeficiente $a_{n-2}$ se multiplica por $px_0 + x_0'$,

. . . . . . . . . . . . . . . . . .

el coeficiente $a_1$ se multiplica por $p^{n-2}x_0 + p^{n-3}x_0' + \ldots + x_0^{(n-2)}$,

el coeficiente $a_0$ se multiplica por $p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_0' + \ldots + x_0^{(n-1)}$.

Todos estos productos se suman. Se adiciona además la imagen del segundo miembro de la ecuación diferencial $F(p)$. Todos los términos del segundo miembro de la igualdad (34′), a excepción de $F(p)$, después de reducir los términos semejantes, forman un polinomio de $p$ de $(n - 1)$-ésimo grado con coeficientes conocidos. Designémoslo por $\psi_{n-1}(p)$. De este modo, la ecuación (34′) podemos escribirla en la forma:

$$\bar{x}(p)\,\varphi_n(p) = \psi_{n-1}(p) + F(p).$$

De esta ecuación determinamos $\bar{x}(p)$:

$$\bar{x}(p) = \frac{\psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)} + \frac{F(p)}{\varphi_n(p)}. \qquad (36)$$

Pues, $\bar{x}(p)$ determinado de este modo es la imagen de la solución $x(t)$ de la ecuación (31) que satisface a las condiciones iniciales (32). Si ahora hallamos la función $x^*(t)$, cuya imagen es la funcion $\bar{x}(p)$ determinada por la igualdad (36), entonces, en virtud del teorema de unicidad, formulado en § 1, se deduce que $x^*(t)$ es la solución de la ecuación (31) que satisface a las condiciones (32), es decir,

$$x^*(t) = x(t).$$

Si hallamos la solución de la ecuación (31) para condiciones iniciales nulas: $x_0 = x_0' = x_0'' = \ldots x_0^{(n-1)} = 0$, entonces en la igualdad (36) $\psi_{n-1}(p) = 0$, y ésta toma la forma:

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{\varphi_n(p)}$$

ó

$$\bar{x}(p)=\frac{F(p)}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n}. \qquad (36')$$

**Ejemplo 1.** Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{dx}{dt}+x=1,$$

que satisface a las condiciones: para $t=0$, $x=0$.

**Solución.** Formemos la ecuación auxiliar

$$\bar{x}(p)(p+1)=0+\frac{1}{p} \text{ ó } \bar{x}(p)=\frac{1}{(p+1)p}.$$

Descomponiendo la fracción del segundo miembro en las fracciones elementales, obtenemos:

$$\bar{x}(p)\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}.$$

Usando las fórmulas 1 y 4 de la tabla 1, hallamos la solución:

$$x(t)=1-e^{-t}.$$

**Ejemplo 2.** Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2}+9x=1,$$

que satisface a las condiciones iniciales: $x_0=x_0'=0$, para $t=0$.

**Solución.** Escribamos la ecuación auxiliar (34')

$$\bar{x}(p)(p^2+9)=\frac{1}{p} \text{ ó } \bar{x}(p)=\frac{1}{p(p^2+9)}.$$

Descomponiendo esta fracción en las fracciones elementales, obtenemos:

$$\bar{x}(p)=\frac{-\frac{1}{9}p}{p^2+9}+\frac{\frac{1}{9}}{p}.$$

Basándonos en las fórmulas 1 y 3 de la tabla 1, hallamos la solución:

$$x(t)=-\frac{1}{9}\cos 3t+\frac{1}{9}.$$

**Ejemplo 3.** Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=t,$$

que satisface a las condiciones iniciales: para $t=0$, $x_0=x_0'=0$.

**Solución.** Escribamos la ecuación auxiliar (34')

$$\bar{x}(p)(p^2+3p+2)=\frac{1}{p^2}$$

ó

$$\bar{x}(p)=\frac{1}{p^2}\,\frac{1}{(p^2+3p+2)}=\frac{1}{p^2(p+1)(p+2)}\,.$$

**Descomponiendo esta fracción en las fracciones elementales por el método de coeficientes indefinidos, obtenemos:**

$$\bar{x}(p)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{p^2}-\frac{3}{4}\,\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{4(p+2)}\,.$$

**Según las fórmulas 9, 1 y 4 de la tabla 1 hallamos la solución:**

$$x(t)=\frac{1}{2}\,t-\frac{3}{4}+e^{-t}-\frac{1}{4}\,e^{-2t}.$$

**Ejemplo 4.** Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\,\frac{dx}{dt}+5x=\operatorname{sen} t$$

que satisface a las condiciones: $x_0=1$, $x_0'=2$, para $t=0$.
**Solución.** Escribamos la ecuación auxiliar (34′)

$$\bar{x}(p)(p^2+2p+5)=p\cdot 1+2+2\cdot 1+L\{\operatorname{sen} t\}$$

ó

$$\bar{x}(p)(p^2+2p+5)=p+4+\frac{1}{p^2+1}\,,$$

de donde hallamos $\bar{x}(p)$:

$$\bar{x}(p)=\frac{p+4}{p^2+2p+5}+\frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+5)}\,.$$

**Descomponiendo la última fracción del segundo miembro en las fracciones elementales, podemos escribir:**

$$\bar{x}(p)=\frac{\frac{11}{10}p+4}{p^2+2p+5}+\frac{-\frac{1}{10}p+\frac{1}{5}}{p^2+1}$$

ó

$$\bar{x}(p)=\frac{11}{10}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}+\frac{29}{10\cdot 2}\cdot\frac{2}{(p+1)^2+2^2}-\frac{1}{10}\cdot\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2+1}\,.$$

**En virtud de las fórmulas 8, 7, 3 y 2 de la tabla 1, obtenemos la solución:**

$$x(t)=\frac{11}{10}\,e^{-t}\cos 2t+\frac{29}{20}\,e^{-t}\operatorname{sen} 2t-\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{5}\operatorname{sen} t$$

**o, en definitiva:**

$$x(t)=e^{-t}\left(\frac{11}{10}\cos 2t+\frac{29}{20}\operatorname{sen} 2t\right)-\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{5}\operatorname{sen} t.$$

## § 11. TEOREMA DE DESCOMPOSICION

De la fórmula (36) del párrafo anterior se deduce que la imagen de la solución de la ecuación diferencial lineal consta de dos términos: el primero es una fracción racional propia de $p$, el segundo es una fracción, cuyo numerador es la imagen del segundo miembro de la ecuación $F(p)$, y el denominador, el polinomio $\varphi_n(p)$. Si $F(p)$ es una fracción racional, entonces el segundo término es también una fracción racional. De este modo, hay que saber hallar la función inicial cuya imagen es una fracción racional propia. Examinemos este problema en el presente párrafo. Sea la imagen $L$ de cierta función una fracción racional propia de $p$:

$$\frac{\psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)}.$$

Es preciso hallar la función inicial (original). En § 7, capítulo X, tomo I hemos mostrado que toda fracción racional propia se puede representar en forma de una suma de fracciones elementales de cuatro tipos:

I. $\dfrac{A}{p-a}$,

II. $\dfrac{A}{(p-a)^k}$,

III. $\dfrac{Ap+B}{p^2+a_1p+a^2}$ donde las raíces del denominador son complejas, es decir, $\frac{a_1^2}{4}-a_2<0$,

IV. $\dfrac{Ap+B}{(p^2+a_1p+a_2)^k}$, donde las raíces del denominador son complejas, es decir, $k\geqslant 2$.

Hallemos las funciones iniciales para las fracciones elementales escritas. Para la fraccion de tipo I en virtud de la fórmula 4 de la tabla 1, obtenemos:

$$\frac{A}{p-a} \mathrel{\dot{\to}} Ae^{at}.$$

Para la fracción de tipo II en virtud de las fórmulas 9 y 4 de la tabla 1 obtenemos:

$$\frac{A}{(p-a)^k} \mathrel{\dot{\to}} A\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{at}. \qquad (37)$$

Examinemos ahora la fracción de tipo III. Efectuemos las transformaciones idénticas:

$$\frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2}=\frac{Ap+B}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2}=$$

$$=\frac{A\left(p+\frac{a_1}{2}\right)+\left(B-\frac{Aa_1}{2}\right)}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2}=A\,\frac{p+\frac{a_1}{2}}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2}+$$

$$+\left(B-\frac{Aa_1}{2}\right)\frac{1}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2}.$$

Designando aquí los sumandos primero y segundo por $M$ y $N$ respectivamente, obtenemos en virtud de las fórmulas 8 y 7 de la tabla 1:

$$M \doteq A e^{-\frac{a_1}{2}t}\cos t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}},$$

$$N \doteq \left(B-\frac{Aa_1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}\,e^{-\frac{a_1}{2}t}\operatorname{sen} t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}.$$

De este modo, en definitiva tenemos:

$$\frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2}\doteq$$

$$\doteq e^{-\frac{a_1}{2}t}\left[A\cos t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}+\frac{B-\frac{Aa_1}{2}}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}\operatorname{sen} t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right]. \quad (38)$$

Aquí no examinamos el caso de una fracción elemental de tipo IV, puesto que esto está relacionado con numerosos cálculos. Para algunos casos particulares examinaremos este problema más abajo.

## § 12. EJEMPLOS DE SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR EL METODO OPERACIONAL

**Ejemplo 1.** Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4x=\operatorname{sen} 3x,$$

que satisface a las condiciones iniciales: $x_0=0$, $x_0'=0$, cuando $t=0$.

**Solución.** Formemos la ecuación auxiliar (34')

$$\bar{x}(p)(p^2+4)=\frac{3}{p^2+9}, \quad \bar{x}(p)=\frac{3}{(p^2+9)(p^2+4)}$$

ó

$$\bar{x}(p)=\frac{-\frac{3}{5}}{p^2+9}+\frac{\frac{3}{5}}{p^2+4}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{p^2+9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{p^2+4},$$

de donde obtenemos la solución:

$$x(t)=\frac{3}{10}\operatorname{sen} 2t-\frac{1}{5}\operatorname{sen} 3t.$$

**Ejemplo 2.** Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{d^3x}{dt^3}+x=0,$$

que satisface a las condiciones iniciales: $x_0=1$, $x_0'=3$, $x_0''=8$, cuando $t=0$.
**Solución.** Formemos la ecuación auxiliar (34')

$$\bar{x}(p)(p^3+1)=p^2\cdot 1+p\cdot 3+8,$$

**hallamos:**

$$\bar{x}(p)=\frac{p^2+3p+8}{p^3+1}=\frac{p^2+3p+8}{(p+1)(p^2-p+1)}.$$

**Descomponemos la fracción racional obtenida en las fracciones elementales**

$$\frac{p^2+3p+8}{(p+1)(p^2-p+1)}=\frac{2}{p+1}+\frac{-p+6}{p^2-p+1}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{p-\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}+\frac{11}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Usando la tabla 1, escribamos la solución:

$$x(t)=2e^{-t}+e^{\frac{1}{2}t}\left(-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{11}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

**Ejemplo 3.** Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=t\cos 2t,$$

que satisface a las condiciones iniciales: $x=0$, $x_0'=0$, cuando $t=0$.

**Solución.** Escribamos la ecuación auxiliar (34′)

$$\bar{x}(p)(p^2+1)=\frac{1}{p^2+4}-\frac{8}{(p^2+4)^2},$$

de donde:

$$\bar{x}(p)=-\frac{5}{9}\frac{1}{p^2+1}+\frac{5}{9}\frac{1}{p^2+4}+\frac{8}{3}\frac{1}{(p^2+4)^2}.$$

Por consiguiente,

$$x(t)=-\frac{5}{9}\operatorname{sen}t+\frac{5}{18}\operatorname{sen}2t+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}2t-t\cos 2t\right).$$

Es evidente que aprovechando el método operacional se puede resolver también los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Mostrémoslo en un ejemplo.

**Ejemplo 4.** Hallar la solución del sistema de ecuaciones

$$3\frac{dx}{dt}+2x+\frac{dy}{dt}=1,$$
$$\frac{dx}{dt}+4\frac{dy}{dt}+3y=0,$$

que satisface a las condiciones iniciales: $x=0$, $y=0$, cuando $t=0$.

**Solución.** Designemos $x(t)\doteqdot\bar{x}(p)$, $y(t)\doteqdot\bar{y}(p)$, y escribamos un sistema de ecuaciones auxiliares:

$$(3p+2)\bar{x}(p)+p\bar{y}(p)=\frac{1}{p},$$
$$p\bar{x}(p)+(4p+3)\bar{y}(p)=0.$$

Resolviendo este sistema, hallamos:

$$\bar{x}(p)=\frac{4p+3}{p(p+1)(11p+6)}=\frac{1}{2p}-\frac{1}{5(p+1)}-\frac{1}{10(11p+6)},$$
$$\bar{y}(p)=-\frac{1}{(11p+6)(p+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{p+1}-\frac{11}{11p+6}\right).$$

Según las imágenes hallamos las funciones iniciales, es decir, las soluciones buscadas del sistema:

$$x(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}e^{-t}-\frac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t},$$
$$y(t)=\frac{1}{5}\left(e^{-t}-e^{-\frac{6}{11}t}\right),$$

Análogamente se resuelven los sistemas lineales de órdenes superiores.

## § 13. TEOREMA DE CONVOLUCION

Al resolver ecuaciones diferenciales por el método operacional, puede ser útil el teorema siguiente.

**Teorema de convolución.** *Si $F_1(p)$ y $F_2(p)$ son imágenes de las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$, es decir,*

$$F_1(p) \doteq\!\!> f_1(t) \quad \text{y} \quad F_2(p) \doteq\!\!> f_2(t),$$

*entonces $F_1(p)\,F_2(p)$ es la imagen de la función*

$$\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau,$$

*es decir*

$$F_1(p)\,F_2(p) \doteq\!\!> \int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau. \tag{39}$$

**Demostración.** Hallemos la imagen de la función

$$\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau,$$

partiendo de la definición de la imagen:

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau\right\} = \int_0^\infty e^{-pt}\left[\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau\right] dt.$$

La integral de segundo miembro es la integral iterada de segundo orden que se toma por el dominio limitado por las rectas $\tau = 0$, $\tau = t$ (fig. 380). Cambiemos el orden de integración en esta integral; entonces obtenemos:

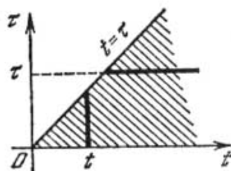



*Fig. 380*

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau\right\} = \int_0^\infty \left[f_1(\tau) \int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau)\, dt\right] d\tau.$$

Sustituyendo la variable $t - \tau = z$ en la integral interior, tenemos:

$$\int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau)\, dt = \int_0^\infty e^{-p(z+\tau)} f_2(z)\, dz = e^{-p\tau}\int_0^\infty e^{-pz} f_2(z)\, dz = e^{-p\tau} F_2(p).$$

Por consiguiente,

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau\right\} = \int_0^\infty f_1(\tau)\, e^{-p\tau} F_2(p)\, d\tau = F_2(p)\int_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\tau)\, d\tau = F_2(p)\, F_1(p).$$

Pues,

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau \leftarrow F_1(p) F_2(p).$$

Esto es la fórmula 15 de la tabla 1.

**Observación 1.** La expresión $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau$ se llama *convolución* (*resultante*) de dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$. La operación para obtener un resultante se llama *convolución* de dos funciones; en este caso

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\,d\tau.$$

Al sustituir la variable $t - \tau = z$ en la integral derecha podemos determinar que la última igualdad es válida.

**Ejemplo.** Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = f(t),$$

que satisface a las condiciones iniciales: $x_0 = x_0' = 0$, cuando $t = 0$.

**Solución.** Escribamos la ecuación auxiliar (34') $\bar{x}(p)(p^2+1) = F(p)$, donde $F(p)$ es la imagen de la función $f(t)$. Por consiguiente, $\bar{x}(p) = \frac{1}{p^2+1} F(p)$, pero $\frac{1}{p^2+1} \to \operatorname{sen} t$, y $F(p) \to f(t)$.

Aplicando la fórmula de convolución (39) y designando $\frac{1}{p^2+1} = F_2(p)$, $F(p) = F_1(p)$, obtenemos:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) \operatorname{sen}(t-\tau)\,d\tau. \tag{40}$$

**Observación 2.** En virtud del teorema de convolución es fácil hallar la imagen de la integral de la función dada, si es conocida la imagen de esta última; es decir, si $F(p) \to f(t)$, entonces:

$$\frac{1}{p} F(p) \to \int_0^t f(\tau)\,d\tau. \tag{41}$$

En efecto, si designamos

$$f_1(t) = f(t), \quad f_2(t) = 1, \quad \text{entonces;} \quad F_1(p) = F(p), \quad F_2(p) = \frac{1}{p}.$$

Sustituyendo estas funciones en la fórmula (39), obtenemos la fórmula (41).

## § 14. ECUACIONES DIFERENCIALES DE OSCILACIONES MECANICAS. ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA TEORIA DE CIRCUITOS ELECTRICOS

De la mecánica se sabe que las oscilaciones de un punto material de masa $m$ se describen por la ecuación *):

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{1}{m}f_1(t); \tag{42}$$

aquí, $x$ es la desviación del punto desde cierta posición; $k$, rigidez de un sistema elástico, por ejemplo, muelle (ballesta); la fuerza de resistencia al movimiento es proporcional (con coeficiente de proporcionalidad $\lambda$) al primer grado de la velocidad; $f_1(t)$ es la fuerza exterior o perturbadora.

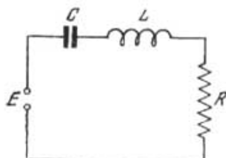



*Fig. 381*

Resolviendo la ecuación de la forma (42), se describen las oscilaciones pequeñas también de otros sistemas mecánicos que tienen un grado de libertad, por ejemplo, oscilaciones torsionales del volante sobre un árbol elástico, si $x$ es el ángulo de giro del volante; $m$, momento de inercia del volante; $k$, rigidez torsional del árbol y $mf_1(t)$, momento de fuerzas exteriores respecto al eje de rotación. Las ecuaciones de la forma (42) describen no sólo oscilaciones mecánicas, sino también los fenómenos en los circuitos eléctricos.

Supongamos que tenemos un circuito eléctrico, compuesto por la inductancia $L$, resistencia $R$ y capacidad $C$, al cual es aplicada una f.e.m. $E$ (fig. 381). Designemos por $i$ la corriente en el circuito; por $Q$, la carga del condensador; entonces, como es sabido de la electrotecnia, $i$ y $Q$ satisfacen a las siguientes ecuaciones:

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{Q}{C}=E, \tag{43}$$

$$\frac{dQ}{dt}=i. \tag{44}$$

De la ecuación (44) obtenemos:

$$\frac{d^2Q}{dt^2}=\frac{di}{dt}. \tag{44'}$$

*) Véase, por ejemplo, tomo II, capítulo XIII, § 26, donde hemos obtenido la ecuación semejante, al examinar la oscilación de una carga sobre una ballesta.

Introduciendo (44) y (44') en la ecuación (43), obtenemos para $Q$ una ecuación de la forma (42):

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=E. \tag{45}$$

Derivando ambos miembros de la ecuación (43) y aplicando la ecuación (44), obtenemos la ecuación para determinar la corriente $i$:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{dE}{dt}. \tag{46}$$

Las ecuaciones (45) y (46) son de la forma (42).

## § 15. SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE OSCILACIONES

Escribamos la ecuación de oscilaciones en la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_2x=f(t), \tag{47}$$

donde el sentido mecánico o físico de la función desconocida $x$, los coeficientes $a_1$, $a_2$ y la función $f(t)$ se determina fácilmente, comparando esta ecuación con las (42), (45), (46). Hallemos la solución de la ecuación (47), que satisface a las condiciones iniciales: $x=x_0$, $x=x_0'$, cuando $t=0$.

Formemos la ecuación auxiliar para (47):

$$\bar{x}(p)(p^2+a_1p+a_2)=x_0p+x_0'+a_1x_0+F(p), \tag{48}$$

donde $F(p)$ es la imagen de la función $f(t)$. De la igualdad (48) hallamos:

$$\bar{x}(p)=\frac{x_0p+x_0'+a_1x_0}{p^2+a_1p+a_2}+\frac{F(p)}{p^2+a_1p+a_2}. \tag{49}$$

Así, para la solución $Q(t)$ de la ecuación (45) que satisface a las condiciones iniciales: $Q=Q_0$, $Q'=Q_0'$, cuando $t=0$, la imagen tendrá la forma:

$$\overline{Q}(p)=\frac{L(Q_0p+Q_0')+RQ_0}{Lp^2+Rp+\frac{1}{C}}+\frac{\bar{E}(p)}{Lp^2+Rp+\frac{1}{C}}.$$

El carácter de la solución depende en gran medida de que las raíces del trinomio $p^2 + a_1p + a_2$ sean complejas, o bien reales distintas, o bien reales iguales. Examinemos detalladamente el caso en que las raíces del trinomio son complejas, es decir, cuando $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2 < 0$. Los demás casos se examinan análogamente.

Puesto que la imagen de una suma de dos funciones es igual a la suma de sus imágenes, entonces, en virtud de la fórmula (38), la función inicial para la primera fracción que se encuentra en el segundo miembro de (49) toma la forma:

$$\frac{x_0p + x_0' + a_1x_0}{p^2 + a_1p + a_2} \mathrel{\dot{\rightarrow}} e^{-\frac{a_1}{2}t}\left[x_0 \cos t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} + \right.$$

$$\left. + \frac{x_0' + \frac{x_0a_1}{2}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \operatorname{sen} t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\right]. \qquad (50)$$

Hallemos ahora la función inicial que corresponde a la fracción:

$$\frac{F(p)}{p^2 + a_1p + a_2}.$$

Aquí apliquemos el teorema de convolución, tomando en consideración que

$$\frac{1}{p^2 + a_1p + a_2} \mathrel{\dot{\rightarrow}} \frac{e^{-\frac{a_1}{2}t}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \operatorname{sen} t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}, \quad F(p) \mathrel{\dot{\rightarrow}} f(t).$$

Por consiguiente, según la fórmula (39) obtenemos:

$$\frac{F(p)}{p^2 + a_1p + a_2} \mathrel{\dot{\rightarrow}}$$

$$\mathrel{\dot{\rightarrow}} \frac{1}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \int_0^t f(\tau)\, e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)} \operatorname{sen}(t-\tau)\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\, d\tau. \qquad (51)$$

Pues, teniendo en cuenta (50) y (51) de (49), obtenemos:

$$x(t) = e^{-\frac{a_1}{2}t}\left[x_0 \cos t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} + \frac{x_0' + \frac{x_0 a_1}{2}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \operatorname{sen} t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \int_0^t f(\tau)\, e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)} \operatorname{sen}(t-\tau)\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\, d\tau. \qquad (52)$$

Si la fuerza exterior $f(t) \equiv 0$, es decir, si tenemos oscilaciones mecánicas o eléctricas libres, entonces la solución se expresa por el primer sumando del segundo miembro de la expresión (52). Si los datos iniciales son iguales a cero: $x_0 = x_0' = 0$, la solución se expresa por el segundo sumando del segundo miembro de la igualdad (52). Examinemos más detalladamente estos casos.

## § 16. INVESTIGACION DE LAS OSCILACIONES LIBRES

Supongamos que la ecuación (47) describe las *oscilaciones libres*, es decir, $f(t) \equiv 0$. Introduzcamos, para simplificar la escritura de las fórmulas, las designaciones: $a_1 = 2n$, $a_2 = k^2$, $k_1^2 = k^2 - n^2$. Entonces la ecuación (47) toma la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = 0. \qquad (53)$$

La solución de esta ecuación $x_{IIb}$, que satisface a las condiciones iniciales: $x = x_0$, $x' = x_0'$ cuando $t = 0$, se da por la fórmula (50) o por el primer sumando de la fórmula (52):

$$x_{IIb}(t) = e^{-nt}\left[x_0 \cos k_1 t + \frac{x_0' + x_0 n}{k_1} \operatorname{sen} k_1 t\right]. \qquad (54)$$

Designemos $x_0 = a$, $\frac{x_0' + x_0 n}{k_1} = b$. Es evidente que para $a$ y $b$ cualesquiera se puede elegir $M$ y $\delta$ tales, que $a = M \operatorname{sen}\delta$, $b = M\cos\delta$, siendo $M^2 = a^2 + b^2$, $\operatorname{tg}\delta = a/b$. Escribamos la fórmula (54) del modo siguiente:

$$x_{IIb} = e^{-nt}[M\cos k_1 t \operatorname{sen}\delta + M \operatorname{sen} k_1 t \cos\delta],$$

o, definitivamente, podemos escribir la solución en la forma:

$$x_{IIb} = \sqrt{a^2 + b^2}\, e^{-nt} \operatorname{sen}(k_1 t + \delta). \qquad (55)$$

La solución (55) corresponde a las *oscilaciones que se amortiguan*.

Si $2n = a_1 = 0$, es decir, si no hay rozamiento interno, la solución tendrá la forma:

$$x_{IIb} = \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen}(k_1 t + \delta).$$

En este caso tienen lugar las *oscilaciones armónicas* (En el tomo II, capítulo XIII, § 27, en las figs. 270 y 271 se dan las gráficas de las oscilaciones armónicas y amortiguadas).

## § 17. INVESTIGACION DE LAS OSCILACIONES MECANICAS Y ELECTRICAS EN CASO DE APLICACION DE UNA FUERZA PERIODICA EXTERIOR

Al estudiar las oscilaciones elásticas de los sistemas mecánicos, y, en particular, al estudiar las oscilaciones eléctricas, hay que examinar diferentes tipos de fuerza exterior $f(t)$. Examinemos detalladamente el caso de una fuerza periódica exterior. Sea la ecuación (47) de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = A \operatorname{sen} \omega t. \quad (56)$$

Para aclarar el carácter del movimiento es suficiente examinar el caso de $x_0 = x_0' = 0$. Podemos obtener la solución de la ecuación mediante la fórmula (52), pero, desde el punto de vista metodológico, aquí *es más cómodo obtener la solución, ejecutando todos* los cálculos intermedios.

Escribamos la ecuación de imagen:

$$\bar{x}(p)(p^2 + 2np + k^2) = A\frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

de donde obtenemos

$$\bar{x}(p) = \frac{A\omega}{(p^2 + 2np + k^2)(p^2 + \omega^2)}. \quad (57)$$

Examinemos el caso de $2n \neq 0$ $(n^2 < k^2)$. Descompongamos la fracción del segundo miembro en fracciones elementales:

$$\frac{A\omega}{(p^2 + 2np + k^2)(p^2 + \omega^2)} = \frac{Np + B}{p^2 + 2np + k^2} + \frac{Cp + D}{p^2 + \omega^2}. \quad (58)$$

Determinemos las constantes $B$, $C$, $D$ por el método de coeficientes indefinidos. Aprovechando la fórmula (38), de la (57) hallemos la

función inicial:

$$x(t) = \frac{A}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}\left\{(k^2 - \omega^2)\operatorname{sen}\omega t - 2n\omega\cos\omega t + \right.$$

$$\left. + e^{-nt}\left[(2n^2 - k^2 + \omega^2)\frac{\omega}{k_1}\operatorname{sen}k_1 t + 2n\omega\cos k_1 t\right]\right\}; \tag{59}$$

aquí, de nuevo $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$. Esta es la solución de la ecuación (56) que satisface a las condiciones iniciales: $x_0 = x_0' = 0$, cuando $t = 0$.

Examinemos un caso particular, cuando $2n = 0$. Esto corresponde a que, por ejemplo, en un sistema mecánico no hay resistencia interior, o sea, falta el amortiguador. Para el caso de un circuito eléctrico esto corresponde a que $R = 0$, es decir, no hay resistencia interior en el circuito. Entonces la ecuación (56) toma la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = A\operatorname{sen}\omega t, \tag{60}$$

y la solución de esta ecuación que satisface a las condiciones: $x_0 = x_0' = 0$, cuando $t = 0$, se obtiene, si en la fórmula (59) ponemos $n = 0$:

$$x(t) = \frac{A}{(k^2 - \omega^2)k}[-\omega\operatorname{sen}kt + k\operatorname{sen}\omega t]. \tag{61}$$

Aquí tenemos la suma de dos oscilaciones armónicas: propias, con frecuencia $k$:

$$x_p(t) = -\frac{A}{k^2 - \omega^2}\frac{\omega}{k}\operatorname{sen}kt$$

y forzadas, con frecuencia $\omega$:

$$x_f(t) = \frac{A}{k^2 - \omega^2}\operatorname{sen}\omega t.$$

Para el caso de $k \gg \omega$ el carácter de oscilaciones está representado en la fig. 382.

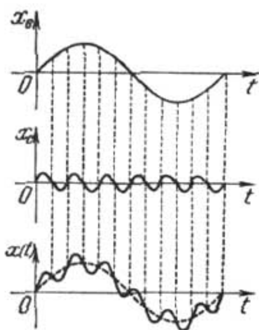


*Fig. 382*

Regresemos de nuevo a la fórmula (59). Si $2n > 0$, lo que tiene lugar en los sistemas mecánicos y eléctricos examinados, entonces el término que contiene el factor $e^{-nt}$, que representa oscilaciones amortiguadas propias, va decreciendo rápidamente, cuando $t$ crece. Con $t$ bastante grande el carácter de las oscilaciones se determina por el término que no contiene el factor $e^{-nt}$, es decir, por el término:

$$x(t) = \frac{A}{(k^2 - \omega^2) + 4n^2\omega^2} \{(k^2 - \omega^2) \operatorname{sen} \omega t - 2n\omega \cos \omega t\}. \quad (62)$$

Introduzcamos las designaciones:

$$\frac{A(k^2 - \omega^2)}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} = M \cos \delta; \quad -\frac{A \cdot 2n\omega}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} = M \operatorname{sen} \delta, \quad (63)$$

donde

$$M = \frac{A}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}.$$

Se puede escribir la solución (62) del modo siguiente:

$$x(t) = \frac{M}{k^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + 4n^2 \frac{\omega^2}{k^2}}} \operatorname{sen}(\omega t + \delta). \quad (64)$$

De la fórmula (64) se deduce que la frecuencia $k$ de oscilaciones forzadas coincide con la frecuencia $\omega$ de la fuerza exterior. Si la resistencia interior que se caracteriza por el número $n$, es pequeña y la frecuencia $\omega$ es próxima a la frecuencia $k$, entonces la amplitud de oscilaciones puede ser hecha tan grande como se quiera, puesto que el denominador puede ser arbitrariamente pequeño. Para $n = 0$, $\omega^2 = k^2$; la solución no se expresa por la fórmula (64).

## § 18. SOLUCION DE LA ECUACION DE OSCILACIONES EN CASO DE RESONANCIA

Examinemos un caso particular, cuando $a_1 = 2n = 0$, es decir, cuando no hay resistencia y la frecuencia de la fuerza exterior coincide con la frecuencia de oscilaciones propias $k = \omega$. En este caso la ecuación toma la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = A \operatorname{sen} kt. \quad (65)$$

Hallemos la solución de esta ecuación que satisface a las condiciones iniciales: $x_0 = 0$, $x'_0 = 0$, cuando $t = 0$. La ecuación auxiliar será:

$$\bar{x}(p)(p^2 + k^2) = A \frac{k}{p^2 + k^2},$$

de donde

$$\bar{x}(p) = \frac{Ak}{(p^2 + k^2)^2}. \tag{66}$$

Hemos obtenido una fracción racional propia de tipo IV, que no habíamos examinado en forma general. A fin de hallar la función inicial para la imagen (66), aprovechemos el siguiente procedimiento. Escribamos la identidad (fórmula 2 de la tabla 1)

$$\frac{k}{p^2 + k^2} = \int_0^\infty e^{-pt} \operatorname{sen} kt\, dt. \tag{67}$$

Derivemos *) ambos miembros de esta igualdad respecto a $k$:

$$\frac{1}{p^2 + k^2} - \frac{2k^2}{(p^2 + k^2)^2} = \int_0^\infty e^{-pt} t \cos kt\, dt.$$

Usando la igualdad (67), podemos escribirla en la forma:

$$-\frac{2k^2}{(p^2 + k^2)^2} = \int_0^\infty e^{-pt} \left[ t \cos kt - \frac{1}{k} \operatorname{sen} kt \right] dt.$$

De donde se deduce directamente:

$$\frac{Ak}{(p^2 + k^2)^2} \doteq \frac{A}{2k} \left( \frac{1}{k} \operatorname{sen} kt - t \cos kt \right)$$

(de esta fórmula se obtiene la 13 de la tabla 1). Pues, la solución buscada de la ecuación (65) es:

$$x(t) = \frac{A}{2k} \left( \frac{1}{k} \operatorname{sen} kt - t \cos kt \right). \tag{68}$$

---

*) La integral del segundo miembro, se puede representar en forma de una suma de dos integrales de una variable real, cada una de las cuales depende del parámetro $k$.

Estudiemos el segundo sumando de esta solución

$$x_2(t) = -\frac{A}{2k} t \cos kt; \tag{68'}$$

al aumentar $t$, esta magnitud no es acotada. La amplitud de oscilaciones que corresponden a la fórmula (68') crece ilimitadamente, al aumentar indefinidamente $t$. Por tanto, la amplitud de oscilaciones que corresponden a la fórmula (68) crece ilimitadamente. Este fenómeno que tiene lugar al coincidir la frecuencia de oscilaciones propias con la frecuencia de fuerza exterior, se llama resonancia (véase también tomo II, capítulo XIII, § 29, fig. 273).

## § 19. TEOREMA DE RETARDO

Sea la función $f(t)$ idénticamente igual a cero, cuando $t < 0$ (fig. 383, $a$). Entonces la función $f(t - t_0)$ será idénticamente

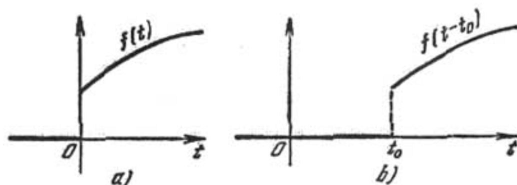



*Fig. 383*

igual a cero, cuando $t < t_0$ (fig. 383,$b$). Demostremos el siguiente teorema de retardo:

**Teorema.** *Si $F(p)$ es imagen de la función $f(t)$, entonces $e^{-pt_0}F(p)$ es la imagen de la función $f(t-t_0)$, es decir, si $f(t) \doteq F(p)$, entonces:*

$$f(t - t_0) \doteq e^{-pt_0} F(p.)$$

**Demostración**. Según la definición de imagen tenemos:

$$L\{f(t - t_0)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(t-t_0)\, dt = \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t-t_0)\, dt + \int_{t_0}^\infty e^{-pt} f(t-t_0)\, dt.$$

La primera integral del segundo miembro de la igualdad es igual a cero puesto que $f(t - t_0) = 0$, cuando $t < t_0$. En la última integral sustituyamos la variable, poniendo $t - t_0 = z$:

$$L\{f(t - t_0)\} = \int_0^\infty e^{-p(z+t_0)} f(z)\, dz = e^{-pt_0} \int_0^\infty e^{-pz} f(z)\, dz = e^{-pt_0} F(p).$$

De este modo, $f(t - t_0) \doteq e^{-pt_0} F(p)$.

**Ejemplo.** En el § 2 hemos establecido para una función unitaria de Heaviside: $\sigma_0(t) \doteq \frac{1}{p}$. Basándose en el teorema demostrado, se deduce que para la función $\sigma_0(t-h)$, representada en la fig. 384, la imagen $L$ será $\frac{1}{p}e^{-ph}$, es decir,

$$\sigma_0(t-h) \doteq \frac{1}{p}e^{-ph}.$$

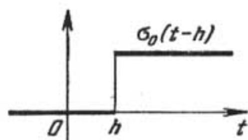



*Fig. 384*

## Ejercicios para el capítulo XIX

Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones para las condiciones iniciales indicadas:

1. $\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=0$, $x=1$, $x'=2$ para $t=0$. *Resp.* $x=4e^{-t}-3e^{-2t}$.

2. $\frac{d^3x}{dt^3}-\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $x=2$, $x'=0$, $x''=1$ para $t=0$. *Resp.* $x=1-t+e^{t}$.

3. $\frac{d^2x}{dt^2}-2a\frac{dx}{dt}+(a^2+b^2)x=0$, $x=x_0$, $x'=x_0'$ para $t=0$. *Resp.* $x=\frac{e^{at}}{b}\times$ $\times[x_0b\cos bt+(x_0'-x_0a)\operatorname{sen} bt]$.

4. $\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+2x=e^{5t}$, $x=1$, $x'=2$ para $t=0$. *Resp.* $x=\frac{1}{12}e^{5t}+$ $+\frac{1}{4}e^{t}+\frac{2}{3}e^{2t}$.

5. $\frac{d^2x}{dt^2}+m^2x=a\cos nt$, $x=x_0$, $x'=x_0'$ para $t=0$. *Resp.* $x=\frac{a}{m^2-n^2}\times$ $\times(\cos nt-\cos mt)+x_0\cos mt+\frac{x_0'}{m}\operatorname{sen} mt$.

6. $\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}=t^2$, $x=0$, $x'=0$ para $t=0$. *Resp.* $x=2e^{t}-\frac{1}{3}t^3-t^2-2t-2$.

7. $\frac{d^3x}{dt^3}+x=\frac{1}{2}t^2e^{t}$, $x=x'=x''=0$ para $t=0$. *Resp.* $x=\frac{1}{4}\left(t^2-3t+\frac{3}{2}\right)\times$ $\times e^{t}-\frac{1}{24}e^{-t}-\frac{1}{3}\left\{\cos\frac{t\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{t\sqrt{3}}{2}\right\}e^{\frac{1}{2}t}$.

8. $\frac{d^3x}{dt^3}+x=1$, $x_0=x_0'=x_0''=0$ para $t=0$. *Resp.* $x=1-\frac{1}{3}e^{-t}-$ $-\frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}$.

9. $\frac{d^4x}{dt^4}-2\frac{d^2x}{dt^2}+x=\operatorname{sen} t$, $x_0=x_0'=x_0''=x_0'''=0$ para $t=0$. *Resp.* $x=$ $=\frac{1}{8}[e^{t}(t-2)+e^{-t}(t+2)+2\operatorname{sen} t]$.

10. Hallar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2x}{dt^2}+y=1, \quad \frac{d^2y}{dt^2}+x=0,$$

que satisface a las condiciones iniciales: $x_0=y_0=x_0'=y_0'=0$, cuando $t=0$. *Resp.* $x(t)=-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t}$, $y(t)=-\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}+1$.

## INDICE ALFABETICO DE MATERIAS